Institut Pons d'Icart
Matemàtiques – 1r de BAT
Recuperació i millora
16/06/17. 12.30-14.00

NOM: ____________________

$30+10+15+20+15+25=115$
(S'avaluarà sobre 100 punts)

Enunciat 1. Considereu la funció $f(x)=x^4-2x^2-63$.

a) Feu-ne la descomposició factorial i trobeu els talls del seu gràfic amb els eixos.
b) Estudieu el signe de $f'(x)$ i deduïu-ne la monotonia de $f(x)$ i els seus extrems locals.
c) Estudieu el signe de $f''(x)$ i deduïu-ne la concavitat de $f(x)$ i els seus punts d'inflexió.
d) Apliqueu els resultats obtinguts al traçat del gràfic de $f(x)$.

a) $f(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{2}=\frac{2\pm 16}{2}= \begin{cases} 9 \\ -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\pm 3}$ o Talls OX

Talls OY: $\boxed{f(0)=-63}$

Factors $f(x)=(x^2-9)(x^2+7)=\boxed{(x+3)(x-3)(x^2+7)}$

b) $f'(x)=4x^3-4x$; $f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2-1)=0 \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ o } x=\pm 1}$ Candidats a extrems locals

	-1	0	1	
$s(f')$	$-\cdot+$ ⊖	⊕ $-\cdot-$	$+\cdot-$ ⊖	⊕ $+\cdot+$
$m(f)$	↘	↗	↘	↗

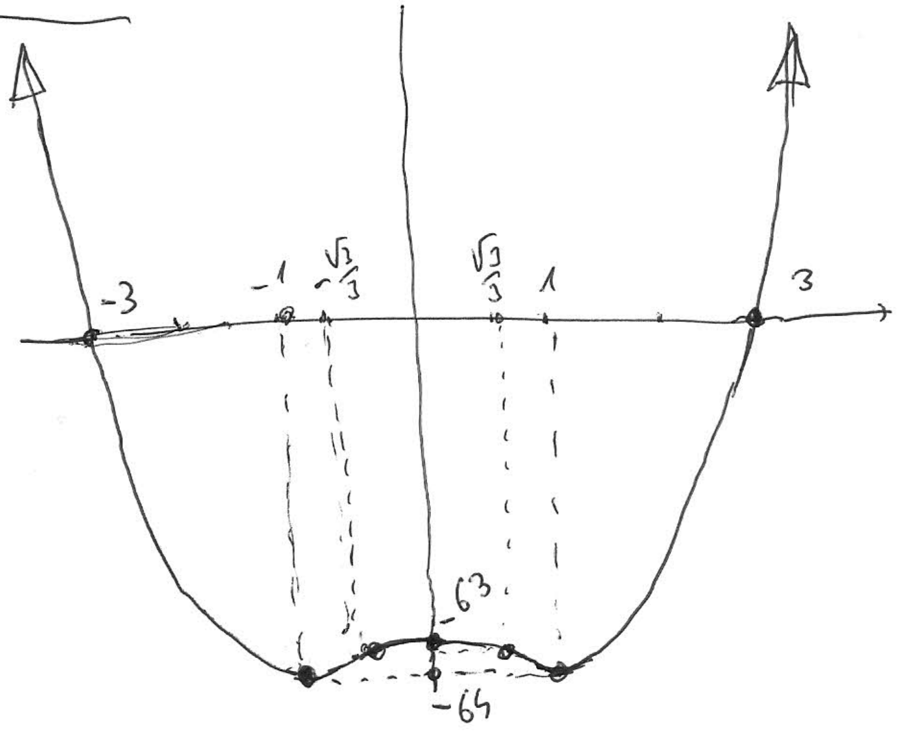
$4x$, x^2-1

f creixent $\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$
f decreixent $\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$
Mínim local en $x=-1$ i $f(-1)=1-2-63=-64$
Màxim local en $x=0$ i $f(0)=-63$
Mínim local en $x=1$ i $f(1)=1-2-63=-64$

	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	
$s(f'')$	$+$	$-$		$+$
$c(f)$	$\cup$	$\cap$		$\cup$

$f''(x)=12x^2-4=4(3x^2-1)$; $f''(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$ Candidats a punts d'inflexió

f és còncava amunt $\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
f és " avall $\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
f té punt d'inflexió en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-63.\hat{6}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-63.\hat{6}\right)$



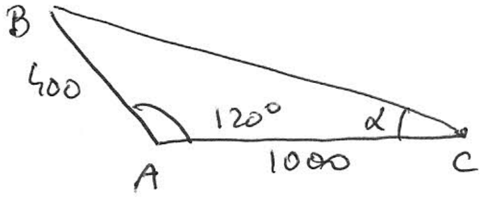
Enunciat 2. Simplifiqueu sense l'ús de nombres decimals i racionalitzeu si escau. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt{8a^3}\cdot\sqrt[6]{8a^5}}{\sqrt[3]{8a}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{8^3a^9\cdot 8\cdot a^5}{8^2a^2}} = \sqrt[6]{8^2a^{12}} = \sqrt[6]{2^6a^{12}} = \boxed{2a^2}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}+\dfrac{2}{(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3+\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \dfrac{4\sqrt{3}-2}{2} = \boxed{2\sqrt{3}-1}$

Enunciat 3. Coneixem les dades següents d'un triangle $\triangle ABC$. $AB = 400\text{m}$, $AC = 1\text{km}$ i $\widehat{BAC} = 120°$. Trobeu la longitud BC i la distància del vèrtex A al costat BC.

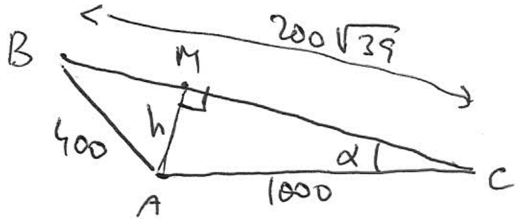


$BC = \sqrt{400^2+1000^2-2\cdot 400\cdot 1000\cdot\cos 120°}$

$BC = \sqrt{1160000-800000\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$BC = \sqrt{1160000+400000} = \sqrt{1560000}$

$BC = 200\sqrt{39}\ m \simeq \boxed{1248.9996\ m. \simeq 1249\ m}$



$d(A,BC) = d(A,M) = h$

$\dfrac{400}{\sin\alpha} = \dfrac{200\sqrt{39}}{\sin 120°} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{400\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{200\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

$h = AM = AC\cdot\sin\alpha = 1000\cdot\dfrac{1}{\sqrt{13}} = \boxed{\dfrac{1000}{\sqrt{13}} \simeq 277{,}35\ m}$

Enunciat 4. Resoleu les equacions següents: a) $2x = 14 + \sqrt{4x+20}$
b) $2\log(3x-1) = 2 + \log x$ c) $\sin(3x) + \sin x = \sin 2x$ d) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{10}{x^4-1} = 0$

a) $(2x-14)^2 = 4x+20 \iff 4x^2 - 56x + 196 = 4x + 20$

$\iff 4x^2 - 60x + 176 = 0 \iff x^2 - 15x + 44 = 0$

$x = \dfrac{15 \pm \sqrt{225-176}}{2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{49}}{2} =$ 11 Solució bona; 4 Solució falsa

Comprovació: $x=11 \Rightarrow 22 = 14 + \sqrt{44+20} \Rightarrow$ cert
$x=4 \Rightarrow 8 = 14 + \sqrt{16+20} \Rightarrow$ fals $\Rightarrow$

b) $2\log(3x-1) = 2 + \log x$
$\log(3x-1)^2 - \log x = 2$
$\log\dfrac{(3x-1)^2}{x} = 2 \Rightarrow \dfrac{(3x-1)^2}{x} = 100 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 100x$
$\Rightarrow 9x^2 - 106x + 1 = 0$
$\boxed{x \simeq 11{,}734}$

c) $2\sin(2x)\cos x = \sin(2x) \iff \sin(2x)(2\cos x - 1) = 0$

$\iff \sin(2x) = 0$ o $\cos x = \frac{1}{2}$

$\iff 2x = 0^\circ + m\cdot 180^\circ$
$x = 60^\circ + m\cdot 360^\circ$
$x = 300^\circ + m\cdot 360^\circ$ $\iff$ $\boxed{\begin{array}{l} x = m\cdot 90^\circ \\ x = \pm 60^\circ + m\cdot 360^\circ \end{array}}$

d) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Multiplico els dos membres per x^4-1:

$(x+1)(x^2+1) + (x^2+1) + 10 = 0 \iff x^3 + x^2 + x + 1 + x^2 + 1 + 10 = 0$

$\iff x^3 + 2x^2 + x + 12 = 0$

Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 1 & 12 \\ -3 & & -3 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}$$

$\hookrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \notin \mathbb{R}$

Solució: $\boxed{x = -3}$

Enunciat 5. Donats els punts $A(0,0)$, $B(6,0)$ i $C(3,-1)$, trobeu

a) L'equació de la circumferència que passa per A, B i C, el seu centre i el seu radi.
b) L'angle que formen els segments AB i AC.
c) La distància del punt B a la recta que passa per A i C.

a) $\mathcal{C}: x^2+y^2+mx+ny+p=0$ $\quad (a,b)=$ centre i $r=$ radi

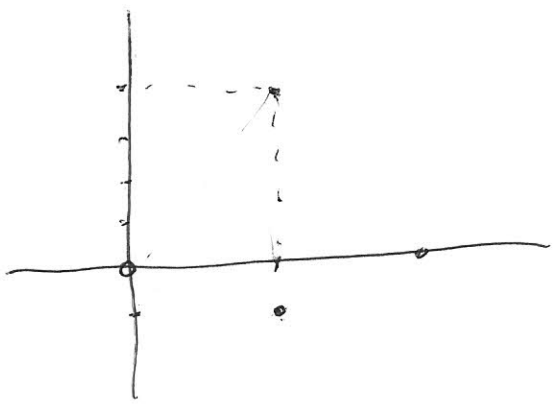
$$\left.\begin{array}{l} A\in\mathcal{C} \Leftrightarrow p=0 \\ B\in\mathcal{C} \Leftrightarrow 36+6m+p=0 \\ C\in\mathcal{C} \Leftrightarrow 9+1+3m-n+p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p=0 \\ m=-6 \Rightarrow a=-\frac{m}{2}=3 \\ n=10+3m=-8 \Rightarrow b=-\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4 \end{array}$$

$\boxed{\text{Centre} = (3,4) \quad \text{radi} = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5}$

$\boxed{\text{Equació: } x^2+y^2-6x-8y=0}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \dfrac{|(6,0)\cdot(3,-1)|}{\sqrt{36}\,\sqrt{10}} = \dfrac{18}{6\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)} \boxed{\simeq 18^\circ 26' 5.82''}$

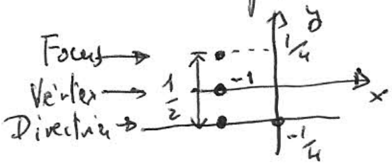
c) $B(6,0)$
$r_{AC}: y=-\frac{1}{3}x \Leftrightarrow x+3y=0$ $\quad \Big\}\ d(B, r_{AC}) = \dfrac{|6+3\cdot 0|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \boxed{\dfrac{6}{\sqrt{10}}} \boxed{\simeq 1{,}8974}$



Enunciat 6. Considereu la funció $f(x) = (x+1)^2$.

a) Quina cònica descriu el seu gràfic i definiu-la com a lloc geomètric?
b) Trobeu la funció derivada de $f(x)$, a partir de la definició de derivada.
c) Trobeu l'equació de la recta tangent al seu gràfic en el punt d'abscissa $x = 1$.
d) Trobeu l'equació de la recta tangent al seu gràfic, paral·lela a la recta d'equació $2x+y=0$.
e) Representeu els tres gràfics.

a) Comparem $y=(x+1)^2$ amb $2p(y-\beta)=(x-\alpha)^2 \Rightarrow \alpha=-1, \beta=0, p=\frac{1}{2}$



És una paràbola de focus $(-1,\frac{1}{4})$ i directriu $y=-\frac{1}{4}$

b) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)^2-(x+1)^2}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+1)^2+h^2+2h(x+1)-(x+1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h(x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2(x+1))}{\cancel{h}}=0+2(x+1)=\boxed{2x+2}$

c) Rta. tangent en x_0 : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$x_0=1$
$f(x_0)=f(1)=4$
$f'(x_0)=f'(1)=2\cdot 1+2=4$
$\Big\} \Rightarrow y-4=4(x-1) \Rightarrow \boxed{y=4x}$

d) Recta tangent paral·lela a $2x+y=0 \Rightarrow f'(x_0)=-2 \Rightarrow 2x_0+2=-2 \Rightarrow x_0=-2$

$y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2) \Rightarrow y-1=-2(x+2) \Rightarrow \boxed{y=-2x-3}$

e)