TRIEU DUES QÜESTIONS DE CADA SECCIÓ

1. Calculeu tots els nombres de 4 xifres que es poden construir amb els nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. Esbrineu, entre els nombres anteriors, quants n'hi ha que tinguin alguna xifra repetida.

Tenim $n = 7$ elements per muntar col·leccions de $k = 4$ elements en què

- L'**ordre és important** perquè quan muntem nombres importa la posició de les xifres, per exemple $1527 \neq 1275$.
- Els elements de cada col·lecció **es poden repetir**, així podem construir nombres com 1112, 1747, etc., i **no està fixada**.

Per tant, la solució és $\mathrm{VR}_7^4 = 7^4 = \boxed{2401 \text{ nombres}}$.

Quant a la segona part, només es tracta de restar dels anteriors els nombres que no tenen xifres repetides. Aquests es poden obtenir tenint en compte que són col·leccions en què **importa l'ordre** i en les quals els elements **no es poden repetir**.

Així obtenim $\mathrm{VR}_7^4 - \mathrm{V}_7^4 = 7^4 - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2401 - 840 = \boxed{1561 \text{ nombres}}$.

2. Quants possibles equips de 6 nois i 6 noies es poden muntar si es pot triar entre 10 nois i 8 noies.

Aquí haurem de muntar equips de 6 noies escollides entre 8, i per cadascun d'aquest equips mirar amb quants equips de 6 nois els podem agrupar. O sigui que haurem de multiplicar el nombre d'equips de noies pel nombre d'equips de nois. Quan muntem aquests equips no ens han parlat de jerarquies ni posicions diferents entre els seus integrants, per tant considerem l'**ordre no important** i, a més, les persones **no poden estar repetides** en un mateix equip. Conseqüentment,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nombre d'equips de noies} = \mathrm{C}_8^6 = \mathrm{C}_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28 \\ \text{Nombre d'equips de nois} = \mathrm{C}_{10}^6 = \mathrm{C}_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Nombre d'equips} = \mathrm{C}_8^6 \cdot \mathrm{C}_{10}^6 = 28 \cdot 210 = \boxed{5880}.$$

3. El nombre de triangles que es poden construir amb els vèrtexs d'un polígon regular és igual a 126 vegades el nombre de vèrtexs. Calculeu el nombre de costats del polígon.

Cada triangle s'identifica amb una col·lecció de 3 vèrtexs escollits entre $\underline{x \text{ vèrtexs del polígon}}$. Si en una mateixa col·lecció canviem l'ordre dels vèrtexs resulta el mateix triangle, per tant **no importa l'ordre**. A més **no hi ha repetició** perquè els vèrtexs d'un triangle són diferents. Per tant, de l'enunciat tenim

$$\mathrm{C}_x^3 = 126\,x \Longrightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2} = 126\,x \Longrightarrow x^2 - 3x + 2 = 756 \Longrightarrow x^2 - 3x - 754 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 3016}}{2} = \frac{3 \pm 55}{2} = \begin{cases} \boxed{29 \text{ vèrtexs o costats}} \\ -26 \end{cases}$$

4. Triem a l'atzar 12 persones entre 10 nois i 8 noies. Quina és la probabilitat que en el grup triat hi hagi 6 nois i 6 noies?

Recordem que si pretenem utilitzar la fórmula de Laplace, els esdeveniments elementals han de ser equiprobables. En aquest cas si considerem com esdeveniments elementals les **col·leccions no ordenades i amb elements no repetits** de persones qualsevol col·lecció té la mateixa probabilitat de ser escollida. Això vol dir que podem treballar amb combinacions.

– Nombre d'esdeveniments possibles: C_{18}^{12}.
– Nombre d'esdeveniments en què hi ha 6 nois i 6 noies (com en el problema 2): $\mathrm{C}_{10}^{6} \cdot \mathrm{C}_{8}^{6}$.

Per tant,

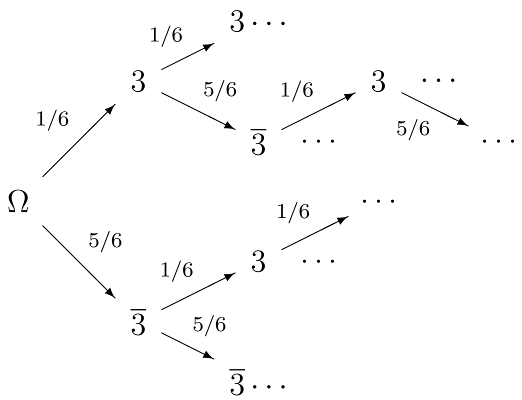
$$P(6 \text{ nois i } 6 \text{ noies}) = \frac{\mathrm{C}_{10}^{6} \cdot \mathrm{C}_{8}^{6}}{\mathrm{C}_{18}^{12}} = \frac{\mathrm{C}_{10}^{4} \cdot \mathrm{C}_{8}^{2}}{\mathrm{C}_{18}^{6}} = \frac{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \dfrac{8 \cdot 7}{2}}{\dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{5880}{18564} \approx \boxed{0.3167}.$$

• **Alternativa:** També s'hagués pogut treballar amb col·leccions ordenades com esdeveniments elementals, perquè també són equiprobables. El desavantatge és que el recompte dels casos favorables es fa més complex. Si es treballa amb aquesta hipòtesi només presentem el desenllaç:

$$P(6 \text{ nois i } 6 \text{ noies}) = \frac{\mathrm{V}_{10}^{6} \cdot \mathrm{V}_{8}^{6} \cdot \mathrm{C}_{12}^{6}}{\mathrm{V}_{18}^{12}} = \cdots = \frac{2816529408000}{8892185702400} = \frac{70}{221} \approx 0.3167\,.$$

5. Tenim un dau de sis cares numerades amb els nombres 1, 2, 3, 4, 5 i 6. El tirem sis vegades seguides. Calculeu la probabilitat d'obtenir dos tresos i quatre nombres diferents de 3.

Estudiem l'arbre de probabilitats dels esdeveniments "$\mathbf{3}$ = treure 3" i "$\overline{\mathbf{3}}$ = no treure 3", resultants de les sis tirades.



Sumem les probabilitats de totes les trajectòries amb 2 tresos. (Anomenem T_i aquestes trajectòries.):

$$P(T_i) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^6}$$

$$P\left(\bigcup_i T_i\right) = \sum_i P(T_i) = \mathrm{C}_6^2 \cdot \frac{5^4}{6^6} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{5^4}{6^6} \approx 0.2009$$

• **Alternativa:** Si es vol fer servir la fórmula de Laplace es poden considerar els esdeveniments elementals equiprobables consistents en col·leccions ordenades de sis símbols en triats entre el $\mathbf{3}$ i el $\overline{\mathbf{3}}$. Llavors, si anomenem S l'esdeveniment "treure dues vegades el $\mathbf{3}$ i quatre vegades el $\overline{\mathbf{3}}$", tindrem sense entrar en explicacions,

$$P(S) = \frac{c(S)}{c(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{VR}_5^4}{\mathrm{VR}_6^6} = \cdots \approx 0.2009$$

6. A un càsting de figurants per a una pel·lícula han assistit 500 dones i 400 homes. Un total de 180 dones i 120 homes tenen els ulls blaus. Triem una de les persones que assisteixen al càsting que té ulls blaus. Quina és la probabilitat que sigui una dona?
Indicació: Si utilitzeu les fórmules de la probabilitat condicionada recordeu que

$$\boxed{P(A/B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \boxed{\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}}.$$

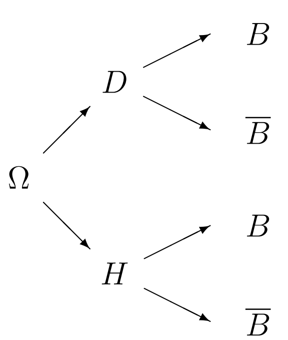
En tenir totes les persones d'ulls blaus la mateixa probabilitat de ser triades, considerem $\Omega = \{\text{persones amb ulls blaus}\}$ i $D_b = \{\text{dones amb ulls blaus}\}$. Per la fórmula de Laplace,

$$P(D_b) = \frac{c(D_b)}{c(\Omega)} = \frac{180}{180+120} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}.$$

• **Amb la fórmula de la probabilitat condicionada:** Si considerem $\Omega = \{900 \text{ persones}\}$, $D = \{500 \text{ dones}\}$, $B = \{300 \text{ persones amb ulls blaus}\}$ i $D\cap B = \{180 \text{ dones amb ulls blaus}\}$.

$$P(D/B) = \frac{P(D\cap B)}{P(B)} = \frac{180/900}{300/900} = \frac{180}{900} = \frac{3}{5} = 0.6\,.$$

• **Si hem fet un diagrama d'arbre partint el conjunt de persones en homes i dones**.



Anomenem,

$$\begin{aligned}\Omega &= \{900 \text{ persones}\},\\ D &= \{500 \text{ dones}\},\\ H &= \{400 \text{ homes}\}\\ B &= \{300 \text{ persones amb ulls blaus}\}.\end{aligned}$$

$$P(D/B) = \frac{P(B/D)\cdot P(D)}{P(B)} = \frac{(180/500)\cdot(500/900)}{300/900} = \frac{180}{300} = 0.6\,.$$

• **Comentari final:** Evidentment, els dos primers mètodes són els més simples. És interessant que esbrineu com ho faríeu en un problema similar, —no igual—, com el següent:

> Hi ha dues urnes U_1 i U_2. En la primera hi ha 4 boles blanques i 6 negres i a la segona 8 boles blanques i 14 negres. S'ha triat una urna a l'atzar i una bola d'aquesta. Ens ensenyen la bola i és blanca, quina és la probabilitat que s'hagi extret de la urna U_1 ?

Fixeu-vos que si actuéssim tal com ho hem fet en la primera opció anomenaríem $\Omega = \{\text{boles blanques de les urnes}\}$ i $U_{1b} = \{\text{boles blanques d'}U_1\}$. Llavors

$$P(U_{1b}) = \frac{c(U_{1b})}{c(\Omega)} = \frac{4}{4+8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0.333\,.$$

Seria correcte el raonament ?

---

7. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu si és el cas: a) $\dfrac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^2a^5}}{\sqrt[4]{a^5b}}$ b) $\sqrt[4]{80} - \dfrac{2}{\sqrt{125}}$

c) Si $x = \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2-3\sqrt{3}}$, simplifiqueu x^2 sense calculadora.

a) $\dfrac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^2a^5}}{\sqrt[4]{a^5b}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^{18}b^4a^{10}}{a^{15}b^3}} = \sqrt[12]{a^{13}b} = \boxed{a\sqrt[12]{ab}}$.

b) $\sqrt[4]{80} - \dfrac{2}{\sqrt{125}} = \sqrt[4]{16\cdot 5} - \dfrac{2}{\sqrt{5^3}} = 2\sqrt[4]{5} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}\sqrt{5}} = \boxed{2\sqrt[4]{5} - \dfrac{2\sqrt{5}}{25} = 2\left(\sqrt[4]{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{25}\right)}$.

c) $\boxed{x^2 \text{ no existeix com a nombre real}}$, perquè $\sqrt{2-3\sqrt{3}}$ no existeix en ser $2-3\sqrt{3}<0$.

Si, de totes maneres, es treballa amb la hipòtesi que $\sqrt{2-3\sqrt{3}}$ pot existir com algun altre tipus de nombre que s'opera com els reals tenim

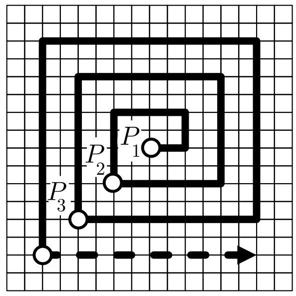
$$x^2 = 6+3\sqrt{3}+2-3\sqrt{3}-2\sqrt{12-18\sqrt{3}+6\sqrt{3}-27} = \boxed{8-2\sqrt{-12\sqrt{3}-15}}.$$

8. Observeu la figura adjunta en què el costat de cada petit quadrat de la quadrícula mesura una unitat de longitud. Considereu que la trajectòria en espiral s'estén sobre el pla de manera que se segueix la mateixa pauta que s'observa en la part visualitzada. Calculeu:

a) El valor de la longitud del tros de trajectòria $P_{64}P_{65}$.

b) El valor de la longitud del tros de trajectòria P_nP_{n+1}.

c) El valor de la longitud de la trajectòria en espiral des del punt P_1 fins el punt P_{2009}.



a) i b) Observem que $P_1P_2 = 4+8 = 12$, $P_2P_3 = 12+16 = 28$, $P_3P_4 = 20+24 = 44$ i que, en general,

$$P_nP_{n+1} = P_{n-1}P_n + 4+4+4+4 = P_{n-1}P_n + 16.$$

O sigui que ens trobem davant d'una progressió aritmètica de trajectes $a_n = P_nP_{n+1}$ de diferència $d = 16$. Llavors

$$P_nP_{n+1} = a_n = a_1+(n-1)d = 12+(n-1)16 = \boxed{16n-4} \quad \text{i} \quad P_{64}P_{65} = a_{64} = 16\cdot 64-4 = \boxed{1020}.$$

c) $P_1P_{2009} = P_1P_2 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{2008}P_{2009} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2008}$

$$= \frac{a_1+a_{2008}}{2}\cdot 2008 = \frac{12+16\cdot 2008-4}{2}\cdot 2008 = \boxed{32264544}.$$

9. En una progressió geomètrica d'un nombre infinit de termes, $a_2 = 36$ i $a_4 = 16$. Calculeu el terme cinquè i la suma de tots els seus termes.

$a_4 = a_2\cdot r^2 \Longrightarrow r^2 = \dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{16}{36} \Longrightarrow r = \pm\dfrac{4}{6} = \pm\dfrac{2}{3}$. Per tant,

$$\boxed{a_5 = a_4\cdot\frac{2}{3} = 16\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{3}} \quad \text{o bé} \quad \boxed{a_5 = a_4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = 16\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{3}}$$

Observem que $a_1 = \dfrac{a_2}{r} = \dfrac{36}{\pm 2/3} = \pm 54$. Llavors, en ser la raó de la progressió un nombre entre -1 i 1, tenim

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \frac{54}{\frac{1}{3}} = 162} \quad \text{o bé} \quad \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{-54}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-54}{\frac{5}{3}} = -\frac{162}{5} = -32.4}$$