

FEU ELS DOS PRIMERS I DOS DE TRIATS ENTRE LA RESTA

1. Voleu amortitzar un deute de 5000 euros en 2 anys. S'ha contractat un interès del 8% anual i el període d'amortització i pagament semestral.

- Construïu la taula d'amortització.
- Expliqueu quin percentatge del tercer pagament es destina a amortitzar el deute i quin percentatge a pagar els interessos generats pel deute pendent.
- Quin percentatge de deute queda per pagar després del tercer pagament?

a) Primer calculem cadascun dels quatre pagaments a que hem de fer, (un cada semestre),

$$a = \frac{5000 \cdot \frac{0.08}{2}}{1 - \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{-4}} = 1377.45 \text{ €}.$$

D'aquest valor en resulta la taula d'amortització:

Final semestre	Pagament semestral	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					5000.00
1	1377.45	200.00	1177.45	1177.45	3822.55
2	1377.45	152.90	1224.55	2402.00	2598.00
3	1377.45	103.92	1273.53	3675.53	1324.47
4	1377.45	52.98	1324.47	5000.00	0.00

b) Percentatge per a l'amortització de deute: $\frac{1273.53}{1377.45} \approx 0.92456 \Rightarrow \boxed{92.46\%}$.

Percentatge per als interessos generats: $\frac{103.92}{1377.45} \approx 0.07544 \Rightarrow \boxed{7.54\%}$.

c) Percentatge de deute per pagar: $\frac{1324.47}{5000} \approx 0.264894 \Rightarrow \boxed{26.49\%}$.

2. En un institut hi ha tres grups A, B, C, de 1r de BAT. En el curs 2005/06 s'han recollit les següents dades de distribució d'alumnat:

- El grup A té un 42% dels alumnes de 1r de BAT, dels quals han promocionat a 2n de BAT un 30%.
- El grup B té un 30% dels alumnes de 1r de BAT, dels quals han promocionat a 2n de BAT un 50%.
- El grup C té un 28% dels alumnes de 1r de BAT, dels quals han promocionat a 2n de BAT un 60%.

Triem un alumne a l'atzar. Calculeu,

- La probabilitat que sigui del grup B i hagi promocionat.
- La probabilitat que no hagi promocionat.
- La probabilitat que, si sabem que ha promocionat, sigui del grup A.

Anomenem S l'esdeveniment "l'alumne promociona" i A , B i C , respectivament, "l'alumne pertany al grup A", "l'alumne pertany al grup B" i "l'alumne pertany al grup C".

a) $P(S \cap B) = P(S/B) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.15}$.

b) Apliquem el teorema de les probabilitats totals:

$$P(\bar{S}) = P(\bar{S}/A) \cdot P(A) + P(\bar{S}/B) \cdot P(B) + P(\bar{S}/C) \cdot P(C) = 0.7 \cdot 0.42 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.28 = \boxed{0.556}$$

c) $P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S/A) \cdot P(A)}{P(S)} = \frac{P(S/A) \cdot P(A)}{1 - P(\bar{S})} = \frac{0.3 \cdot 0.42}{1 - 0.556} = \frac{0.126}{0.444} \approx \boxed{0.2838}$.

3. Opereu, simplifiqueu, si cal, racionalitzeu i en l'últim trobeu m :

a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{a^5 \cdot b} \cdot \sqrt[4]{a \cdot b}}{\sqrt{a \cdot b}}$ c) $3^m = \sqrt[5]{\sqrt{75} - 2\sqrt{3}}$

a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \sqrt{3} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} + \sqrt{3} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} = \boxed{2}$.

b) $\frac{\sqrt[3]{a^5 \cdot b} \cdot \sqrt[4]{a \cdot b}}{\sqrt{a \cdot b}} = a^{\frac{5}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{20+3-6}{12}} \cdot b^{\frac{4+3-6}{12}} = a^{\frac{17}{12}} \cdot b^{\frac{1}{12}} = \boxed{a \sqrt[12]{a^5 \cdot b}}$.

c) $3^m = \sqrt[5]{\sqrt{75} - 2\sqrt{3}} = \sqrt[5]{5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = \sqrt[5]{3\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{3}{10}} \implies \boxed{m = \frac{3}{10}}$.

4. Tenim un calaix amb quatre compartiments, A, B, C i D. Distribuïm en el calaix 12 boles iguals a l'atzar, (algun calaix pot quedar buit). Quina és la probabilitat que,



- a) Les boles quedin distribuïdes com a la figura adjunta.
- b) Hi hagi dues boles en el compartiment A.
- c) Hi hagi algun compartiment buit.

Codificació: Presentarem cada bola amb la lletra del compartiment en què es troba. Per exemple, la distribució del gràfic la representem $AAABBBCCDDDD$. Així cada distribució ve representada per una col·lecció 12 símbols triats entre 4, (A, B, C, D). En aquestes col·leccions l'ordre no és important i hi ha repetició no fixada. Triem un disseny d'experiment de distribució aleatòria en que l'elecció d'aquestes col·leccions sigui equiprobable, (es podrien fer dissenys d'atzar en què no ho fossin i el problema tindria solució diferent). Consegüentment per al càlcul de probabilitats podem utilitzar la fórmula de Laplace en què els casos favorables i possibles es trobin a patir del càlcul de combinacions amb repetició.

a) $P(AAABBBCCDDDD) = \frac{1}{CR_4^{12}} = \frac{1}{C_{15}^{12}} = \frac{1}{\binom{15}{3}} = \frac{1}{455} \approx \boxed{0.0021978}$.

b) Observem que en els casos favorables cal construir col·leccions no ordenades amb repetició de 3 elements, (B, C, D), agafats de 10 en 10.

$$P(2A) = \frac{CR_3^{10}}{CR_4^{12}} = \frac{C_{12}^{10}}{C_{15}^{12}} = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{66}{455} \approx \boxed{0.145}$$

c) Anomenem S = "Algun compartiment buit" i calculem la probabilitat de \bar{S} en què com a mínim hi ha una bola a cada compartiment, $ABCD$ _____ . Llavors

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - \frac{CR_4^8}{CR_4^{12}} = 1 - \frac{\binom{11}{3}}{\binom{15}{3}} = 1 - \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{990}{2730} = \frac{165}{455} = \frac{33}{91} \approx \boxed{0.3626}$$

- 5.** a) La suma d'infinits termes d'una progressió geomètrica de raó entre -1 i 1 és igual a 125. Calculeu el primer terme de la progressió si sabem que el segon terme és igual a 20.
- b) Calculeu i simplifiqueu el terme setzè del desenvolupament de $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^{20}$.
- c) Calculeu raonadament el nombre de números de set xifres diferents, no començats en zero.

a) Si r és la raó de la progressió, sabem que $a_1 = \frac{a_2}{r}$. Llavors, si utilitzem la fórmula de la suma d'infinits termes per a r entre -1 i 1, tenim

$$125 = \frac{20/r}{1-r} \implies 125 - 125r = \frac{20}{r} \implies 25r^2 - 25r + 4 = 0$$

$$\implies r = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{50} = \frac{25 \pm 15}{50} = \begin{cases} \frac{4}{5} \implies a_1 = \frac{20}{4/5} = \boxed{25} \\ \frac{1}{5} \implies a_1 = \frac{20}{1/5} = \boxed{100} \end{cases}$$

b) $T_{16} = \binom{20}{15} \left(\frac{x}{2}\right)^5 \left(-\frac{1}{x}\right)^{15} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 32} x^{5-15} = \boxed{-\frac{969}{2x^{10}}}$.

c) Calculem els nombres que comencen en 1, els que comencen en 2, i així successivament fins acabar amb els que comencen en 9. De cada tipus se'n poden formar col·leccions ordenades sense repetició de 9 elements agafats de 6 en 6. Per tant, el resultat és,

$$9 \cdot V_9^6 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{544320 \text{ nombres}}.$$

6. Fem un dipòsit únic de 10000 € al 5% anual d'interès compost i període de capitalització trimestral. Calculeu,

- a) L'interès produït per 1 € en un any. Quin nom rep aquest interès?
- b) El capital obtingut al cap de 7 anys.
- c) Els anys que han de passar per obtenir un capital que sobrepassi els 20000 €.
- a) Interès = $\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^4 - 1 \approx \boxed{0.050945 \text{ €}}$. Rep el nom de TAE, que en aquest cas seria 5.0945% expressat en percentatge.
- b) $C_7 = 10000 \left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4 \cdot 7} = 10000 (1.0125)^{28} = \boxed{14159.92 \text{ €}}$.
- c) $10000 (1.0125)^{4t} > 20000 \implies (1.0125)^{4t} > 2 \implies 4t > \frac{\log 2}{\log 1.0125} = 55.79763 \implies \boxed{t = 14 \text{ anys}}$.