IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT CCSS — 27/IV/2009
Equacions, polinomis i funcions – I — 1+(1+1+0.5)+1.5+1.5+(0.5+1)

FEU ELS QUATRE PRIMERS I UN DE TRIAT ENTRE EL 5 i EL 6

1. Donats el polinomis $p(x) = 5x^5 - 3x^2 + x + 7$ i $a(x) = x^2 + 3x$, trobeu dos polinomis $s(x)$ i $t(x)$ tals que

$$p(x) = a(x) \cdot s(x) + t(x) \ \text{ i } \ 0 \le \text{grau}[t(x)] < 2.$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
5x^5 & & & -3x^2 & +x & +7 & x^2+3x \\
\cline{7-7}
-5x^5 & -15x^4 & & & & & \boxed{5x^3-15x^2+45x-138=s(x)} \\
 & -15x^4 & & & & & \\
 & +15x^4 & +45x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 45x^3 & -3x^2 & & & \\
 & & -45x^3 & -135x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -138x^2 & +x & & \\
 & & & 138x^2 & +414x & & \\
\cline{4-5}
 & & & & \boxed{415x+7=t(x)} & &
\end{array}$$

2. Considereu el polinomi $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$.

a) Trobeu les arrels reals de $p(x)$ i la seva descomposició factorial.

b) Els valors reals de x tals que $p(x) \ge 0$. (Gràficament a partir dels gràfics de rectes i/o paràboles.)

c) Feu un esquema gràfic de la funció polinòmica definida per $p(x)$. Expliqueu breument tot allò que heu considerat per dibuixar l'esquema.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -2 & -19 & -6 \\
3 & & 9 & 21 & 6 \\
\hline
 & 3 & 7 & 2 & 0
\end{array}$$

Una arrel del polinomi és $x = 3$ i la descomposició inicial és

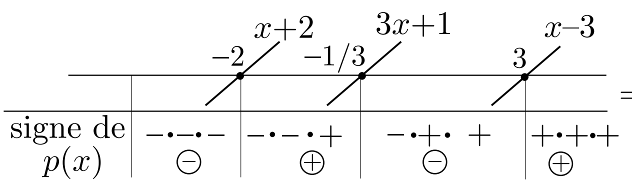
$$p(x) = (x-3)(3x^2 + 7x - 2).$$

Cerquem les arrels del segon factor, per la qual cosa fem $3x^2 + 7x + 2 = 0$,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} \\ -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3x^2 + 7x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+2).$$

Conseqüentment,les arrels del polinomi són: $\boxed{x = 3,\ x = -\frac{1}{3},\ x = -2}$ i la descomposició factorial és $\boxed{p(x) = (x-3)(3x+1)(x+2)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels tres factors per separat:

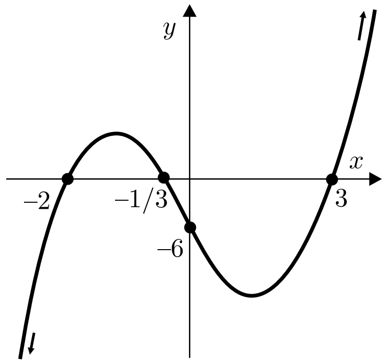


$$\Longrightarrow p(x) \ge 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in \left[-2\,,\,-\frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)}.$$

c) Per a l'esquema gràfic observem que les arrels del polinomi determinen els talls amb l'eix OX. En ser $p(0) = -6$, tenim el tall $(0, -6)$ amb l'eix d'ordenades. L'estudi del signe del polinomi situa el gràfic sobre o sota l'eix OX.

El comportament de $p(x)$ quan x pren valors que tendeixen a infinit en valor absolut és

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6 &= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{19}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) \\
&= +\infty \cdot (3 - 0 - 0 - 0) = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6 &= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{19}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) \\
&= -\infty \cdot (3 - 0 - 0 - 0) = -\infty
\end{aligned}$$



3. En la fase prèvia d'un torneig de ping-pong cada participant juga un partit amb cadascun dels seus contrincants. Quan es guanya un partit es rep una targeta verda, quan es perd un partit es rep una targeta vermella i quan s'empata es rep una targeta groga. En total, acabada la fase prèvia, s'han repartit 226 targetes grogues, 628 de verdes i 628 de vermelles. Quants participants hi havia a la fase prèvia?

Si anomenem x el nombre de jugadors, el nombre de partits és $\dfrac{x(x-1)}{2}$. D'altra banda el nombre de partits és, mitjançant el recompte de targetes, $\dfrac{226}{2} + 628 = 741$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{x(x-1)}{2} = 741 &\iff x^2 - x - 1482 = 0 \\
&\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 5928}}{2} = \frac{1 \pm 77}{2} = \begin{cases} \boxed{39 \text{ participants}} \\ -38 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Opereu i simplifiqueu,

$$\frac{3x+1}{x^2 - x - 2} + \frac{4}{3x^2 - 3}.$$

A partir de les arrels dels dos polinomis denominadors s'obté

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= (x-2)(x+1) \\ 3x^2 - 3 &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{m.c.m.}(x^2 - x - 2, 3x^2 - 3) = 3(x-1)(x+1)(x-2).$$

Llavors

$$\begin{aligned}
\frac{3x+1}{x^2 - x - 2} + \frac{4}{3x^2 - 3} &= \frac{(3x+1)(3x-3) + 4(x-2)}{3(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{9x^2 - 2x - 11}{3(x-1)(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{9(x+1)\left(x - \frac{11}{9}\right)}{3(x-1)(x+1)(x-2)} = \boxed{\frac{9x - 11}{3(x-1)(x-2)} = \frac{9x - 11}{3x^2 - 9x + 6}}
\end{aligned}$$

5. a) Estudieu si el polinomi $x^n + a^n$ és divisible per $x + a$.
b) Raoneu si existeixen polinomis de tercer grau sense arrels, amb una arrel, amb dues arrels diferents, amb tres arrels diferents i amb quatre arrels diferents. (Parlem d'arrels reals.)

a) Anomenem $p(x) = x^n + a^n$ i calculem el residu de la seva divisió entre $x + a$.

$$\text{residu} = p(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} 2a^n \text{ , si } n \text{ és parell} \\ 0 \text{ , si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Per tant, $\boxed{\text{és divisible quan } n \text{ és senar o } a = 0 \text{ i no ho és quan } n \text{ és parell i } a \neq 0}$.

b) Per demostrar l'existència només cal trobar algun polinomi que compleixi la condició.

Sense arrels. No existeixen perquè qualsevol polinomi de tercer grau pot agafar valors positius i valors negatius en tenir els seus límits en l'infinit valor infinit i signes diferents. Per tant, en ser funcions contínues, per canviar dels valors negatius als positius han de passar pel valor zero i allí trobem una arrel.

Una arrel. Només cal considerar $p(x) = (x - a)(x^2 + bx + c)$, amb $b^2 - 4c < 0$. Només té l'arrel $x = a$.

Dues arrels Només cal considerar $p(x) = (x - a)^2(x - b)$, amb $a \neq b$. Té les arrels $x = a$ i $x = b$.

Tres arrels. Només cal considerar $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, amb $a \neq b,\ b \neq c,\ a \neq c$. Té les arrels $x = a$, $x = b$ i $x = c$.

Quatre arrels. No existeixen perquè serien del tipus $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ i s'obtindria un polinomi de quart grau.

6. Sigui el polinomi $p(x) = a\,x^3 + 3\,x^2 - 4a\,x - 12$.

a) Justifiqueu que $p(x)$ és divisible per $x + 2$, per a tots els valors de a.

b) Per a quins valors de a, $p(x)$ només té dues arrels reals diferents? Per a quins valors de a té una sola arrel real?

a) Demostrarem que el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x + 2$ és zero. Utilitzarem la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & 3 & -4a & -12 \\ -2 & & -2a & -6+4a & 12 \\ \hline & a & 3-2a & -6 & 0 \end{array}$$

Observem que el residu dóna 0 amb independència del valor de a.

b) **Dues arrels diferents:**

Si $\boxed{a = 0}$ té dues arrels diferents perquè $3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$.

Si $a \neq 0$, té dues arrels diferents si el polinomi $ax^2 + (3 - 2a)x + 12$ en té una de sola. Això passa quan el seu discriminat és igual a zero.

$$(3-2a)^2+24a = 0 \Longrightarrow 9+4a^2-12a+24a = 0 \Longrightarrow 4a^2+12a+9 = 0 \Longrightarrow (2a+3)^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}.$$

Una sola arrel:

$\boxed{\text{Això no passa mai}}$. Perquè, si $a \neq -\frac{3}{2}$, llavors el discriminant $(2a + 3)^2 > 0$. Això implica que sempre hi ha alguna arrel diferent de -2 per a $ax^2 + (3 - 2a)x + 12$ i, per tant, més d'una arrel per a $p(x)$.