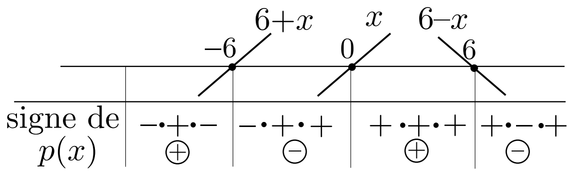
FEU ELS TRES PRIMERS I UN DE TRIAT ENTRE EL 4 i EL 5

1. Considereu el polinomi $p(x) = 36x - x^3$.
 a) Trobeu les arrels reals de $p(x)$ i la seva descomposició factorial.
 b) Els valors reals de x tals que $p(x) \geq 0$. (Gràficament, mitjançant rectes i/o paràboles.)

a) Descomposició factorial: $p(x) = x(36 - x^2) = x(6^2 - x^2) = \boxed{x(6-x)(6+x)}$.

Arrels: $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o bé $6 - x = 0$ o bé $6 + x = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x = 0,\ x = 6\ x = -6}$.

b) Estudiem el signe mitjançant l'estudi dels tres factors ordenats com a la descomposició de més amunt:



$\Longrightarrow p(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in (-\infty\,,\,-6] \cup [0\,,\,6]}$.

2. Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x+2} & , x < -1 \\ 1 - x & , x \geq -1. \end{cases}$

 a) Estudieu-ne la continuïtat, a partir del càlcul de límits en els punts $x = -2$ i $x = -1$.
 b) Amb l'ajut dels resultats anteriors, representeu-la gràficament amb la presentació, si existeixen, de les asímptotes i els talls amb els eixos de coordenades.

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \dfrac{1-(-2)}{-2+2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty. \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \dfrac{1-(-2)}{-2+2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty. \end{array}\right\}$$

Per tant, en $x = -2$ $\boxed{\text{hi ha una discontinuïtat asimptòtica.}}$

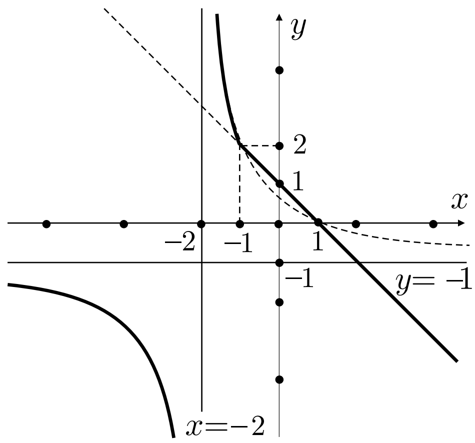
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 - (-1) = 2. \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{1-(-1)}{-1+2} = \dfrac{2}{1} = 2. \end{array}\right\}$$

Això implica $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$.
D'altra banda $f(-1) = 1 - (-1) = 2$. Per tant, en $x = -1$ $\boxed{\text{la funció és contínua.}}$

b) L'asímptota vertical és la recta $\boxed{x = 2}$. L'asímptota horitzontal surt del càlcul de

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0-1}{1+0} = -1 \Longrightarrow \boxed{y = -1}.$$

Els talls amb els eixos els trobem en $(0, f(0)) = (0, 1)$ i quan $1 - x = 0$, és a dir en $(1, 0)$.



3. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{2x-3}{1-\sqrt{4x-5}}$.

a) Trobeu el domini de f.

b) Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$.

c) Calculeu l'antiimatge de $-\dfrac{3}{2}$.

a) S'han de trobar els $x\in\mathbb{R}$ tals que existeixi el radical i el denominador sigui diferent de zero

$$\left.\begin{array}{l}4x-5\geq 0\\ 4x-5\neq 1\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{c}x\geq\dfrac{5}{4}\\[2ex] x\neq\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow \operatorname{Dom}(f)=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

b) Si intentem el càlcul directe s'obté una indeterminació del tipus $\dfrac{0}{0}$. Per desfer la indeterminació multipliquem i dividim per la expressió conjugada del denominador,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2x-3}{1-\sqrt{4x-5}}\cdot\frac{1+\sqrt{4x-5}}{1+\sqrt{4x-5}}\\ &= \lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(2x-3)\left(1+\sqrt{4x-5}\right)}{6-4x}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{1+\sqrt{4x-5}}{-2}=\frac{1+1}{-2}=\boxed{-1}.\end{aligned}$$

c) Hem de resoldre l'equació $f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{1-\sqrt{4x-5}}=-\frac{3}{2}&\Longrightarrow 4x-6=-3+3\sqrt{4x-5}\Longrightarrow 4x-3=3\sqrt{4x-5}\\ &\Longrightarrow\ 16x^2+9-24x=9(4x-5)\Longrightarrow 16x^2-60x+54=0\\ &\Longrightarrow\ 8x^2-30x+27=0\Longrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{225-216}}{8}=\frac{15\pm 3}{8}=\begin{cases}\dfrac{9}{4}\\[2ex] \dfrac{3}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

En no ser $\dfrac{3}{2}$ del domini, $\boxed{f^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}}$, perquè $f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{\frac{9}{2}-3}{1-\sqrt{9-5}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{-1}=-\dfrac{3}{2}$.

---

4. El comportament dels beneficis $B(x)$ d'una gran empresa al llarg d'un any, en funció dels dies x transcorreguts des del principi de l'any, ha seguit força aproximadament el model d'una funció quadràtica. Se sap que el dia 12 els beneficis eren de 410 milions d'euros, el dia 60 eren de 170 milions d'euros i el dia 120 eren de 140 milions d'euros.

a) Trobeu la funció quadràtica que descriu els beneficis.

b) Representeu-la gràficament. Indiqueu el dia que els beneficis han arribat al seu màxim i el dia que han arribat al seu mínim. (Recordeu que $1\leq x\leq 365$.)

a) L'expressió analítica d'una funció quadràtica és $f(x)=ax^2+bx+c$. Si imposem les altres tres condicions de l'enunciat obtenim un sistema d'equacions que un cop resolt proporcionarà la funció.

$$\left.\begin{array}{lrcl} E_1: & 144a+12b+c &=& f(12)\ =410 \\ E_2: & 3600a+60b+c &=& f(60)\ =170 \\ E_3: & 14400+120b+c &=& f(120)=140 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{lrcl} E_2-E_1: & 3456a+48b &=& -240 \\ E_3-E_2: & 10800a+60b &=& -30 \end{array}\Bigg\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 144a+2b &=& -10 \\ 360a+2b &=& -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 216a=9 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{24} \\ b=-8 \\ c=500. \end{array}\right.$$

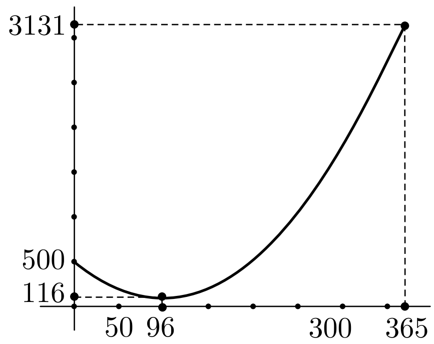
Per tant, la funció és $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{24}\,x^2-8x+500}$.

b) El vèrtex de la paràbola es troba en el punt

$$x_v=\frac{8}{2/24}=96, \quad y_v=f(96)=116.$$

En els extrems del domini tenim

$$f(1)\approx 492.0417$$
$$f(365)\approx 3131.0417$$



Segons el model de la funció quadràtica,

El benefici és màxim l'últim dia de l'any i té un valor aproximat de 3131 milions d'euros. El benefici és mínim el dia 96 de l'any i té un valor de 116 milions d'euros.

5. Resoleu les qüestions següents:

a) Opereu i simplifiqueu, $\dfrac{8}{x^3-16x}+\dfrac{x+5}{x^2+4x}$.

b) Donats el polinomis $p(x)=4x^6-x^3-100$ i $a(x)=x^3+5$, trobeu dos polinomis $s(x)$ i $t(x)$ tals que $p(x)=a(x)\cdot s(x)+t(x)$ i $0\leq \text{grau}[t(x)]<3$.

a) Reduïm les fraccions a comú denominador, per la qual cosa calculem el mínim comú múltiple dels denominadors.

$$\left.\begin{array}{l} x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4) \\ x^2+4x=x(x+4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{m.c.m.}(x^3-16x,x^2+4x)=x(x-4)(x+4).$$

$$\frac{8}{x^3-16x}+\frac{x+5}{x^2+4x}=\frac{8+(x+5)(x-4)}{x(x-4)(x+4)}=\frac{x^2+x-12}{x(x-4)(x+4)}\overset{(*)}{=}\frac{(x-3)(x+4)}{x(x-4)(x+4)}=\boxed{\frac{x-3}{x^2-4x}}.$$

$$(*)\quad x^2+x-12=0 \Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} 3 \\ -4. \end{cases}$$

b) Ho podem resoldre amb l'algoritme estàndard de la divisió o, si practiquem el canvi $x^3=z$, mitjançant la regla de Ruffini. Aquí presentem la segona opció. Hem de dividir $4z^2-z-100$ entre $z+5$,

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -1 & -100 \\ -5 & & -20 & 105 \\ \hline & 4 & -21 & 5 \end{array}$$

Llavors $4z^2-z-100=(z+5)(4z-21)+5$ i, en ser $x^3=z$,

$$\boxed{s(x)=4x^3-21 \ \text{ i } \ t(x)=5}.$$