1. Els pesos de 90 estudiants de 4t d'ESO d'un IES es distribueixen segons la taula adjunta.

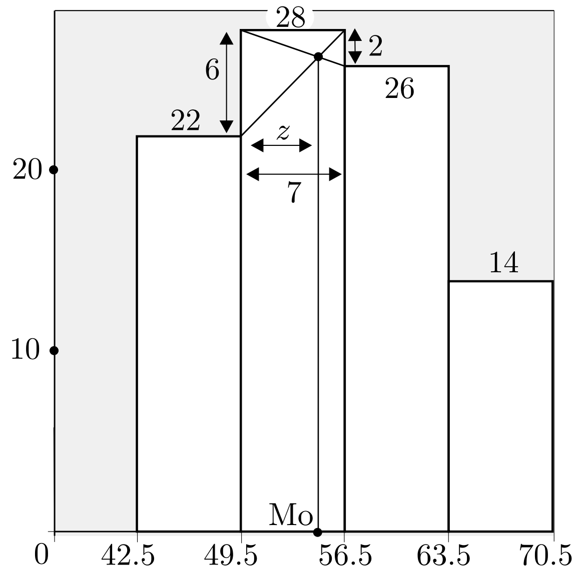
a) Descriviu la població objecte de l'estudi, la variable estadística i el seu tipus.
b) Representeu l'histograma de freqüències absolutes i calculeu la moda.
c) Calculeu el percentatge d'estudiants que no pesa més de 58 kg. Quin nom té aquest paràmetre?
d) Calculeu la mitjana i la desviació estàndard de la variable.
e) Triem una mostra de 30 estudiants entre els 90 inicials amb la distribució següent:

Pes	Nombre d'alumnes
[42.5 , 49.5)	22
[49.5 , 56.5)	28
[56.5 , 63.5)	26
[63.5 , 70.5)	14

Pesos	[42.5 , 49.5)	[49.5 , 56.5)	[56.5 , 63.5)	[63.5 , 70.5)
Nombre d'alumnes	6	6	10	8

Calculeu la seva mitjana aritmètica i la seva desviació estàndard i feu un comentari raonat a partir de la comparació d'aquests resultats de la mostra de 30 estudiants amb els resultats de la població de 90 estudiants.

a) Població objecte de l'estudi: 90 estudiants.
Variable: Pes de cada estudiant.
Tipus de variable: Quantitativa contínua.

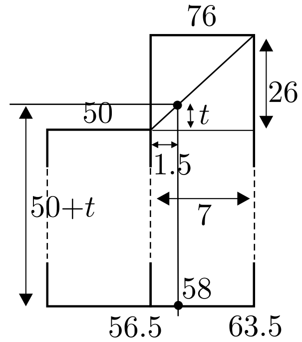


b) **Mo** $= 49.5 + z$, en què $\dfrac{z}{7-z} = \dfrac{28-22}{28-26}$.

Per tant, $2z = 42 - 6z \Longrightarrow z = 5.25 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ **Mo** $= 49.5 + 5.25 = \boxed{54.75}$.

c) Calculem el valor de t en el gràfic:

$$\frac{t}{76-50} = \frac{58-56.5}{63.5-56.5} \Longrightarrow t = \frac{26 \cdot 1.5}{7} \approx 5.57.$$



Per tant, hi ha $50 + 5.57 = 55.57$ observacions en què no se superen els 58 kg. Això correspon a una freqüència relativa acumulada de valor $\dfrac{55.57}{90} = 0.61746$, és a dir un $\boxed{61.746\%}$. Aproximadament és el $\boxed{\textbf{percentil } P_{61.7}}$.

d)

m_i	n_i	$m_i \cdot n_i$	$m_i^2 \cdot n_i$
46	22	1012	46552
53	28	1484	78652
60	26	1560	93600
67	14	938	62846
	90	4994	281650

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{4994}{90} = \boxed{55.489}. \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{281650}{90} - 55.489^2} = \sqrt{50.427} \approx \boxed{7.10}. \end{cases}$$

e)

m_i	n_i	$m_i \cdot n_i$	$m_i^2 \cdot n_i$
46	6	276	12696
53	6	318	16854
60	10	600	21600
67	8	536	35912
	30	1730	101462

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1730}{30} = \boxed{57.667}. \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{101462}{30} - 57.667^2} = \sqrt{56.584} \approx \boxed{7.52}. \end{cases}$$

La mostra no és del tot representativa perquè els valors de la variable es troben desplaçats a la dreta, segons indica la mitjana, i una mica més dispersos, segons indica la desviació típica.

2. En la taula adjunta teniu les despeses en publicitat i les vendes associades d'una empresa.

X : Despeses en milers d'euros	10	20	30	40	50
Y : Vendes en milers d'euros	100	200	220	360	400

Sabem que $\bar{x} = 30$, $\sigma_x = \sqrt{200}$, $\bar{y} = 256$ i $\sigma_y = \sqrt{12064}$.

a) Trobeu el coeficient de Pearson a partir de les desviacions típiques i la covariància. Utilitzant aquest coeficient, raoneu sobre el grau, sentit i tipus de la correlació.

b) Trobeu l'equació de la recta de regressió de Y sobre X i representeu-la gràficament junt amb el núvol de punts de la distribució bidimensional.

c) Quines vendes es poden esperar si les despeses en publicitat són de 35000 euros?

a) Càlcul de la covariància $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{5} - 30 \cdot 256$, (en aquest cas $i = j$ i $n_{ij} = 1$):

x_i	y_j	$x_i \cdot y_j$
10	100	1000
20	200	4000
30	220	6600
40	360	14400
50	400	20000
		46000

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = \dfrac{46000}{5} - 30 \cdot 256 = 1520 \\ \Longrightarrow r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{1520}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{12064}} \approx \boxed{0.9785}. \end{cases}$$

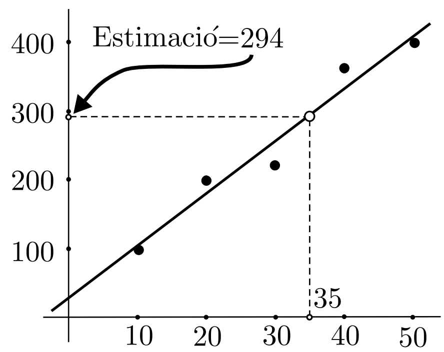
Aquest valor de r indica correlació lineal de grau fort i sentit positiu.

b) $y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \Longleftrightarrow y - 256 = \dfrac{1520}{200}(x - 30)$

$\Longleftrightarrow \boxed{y = 7.6 \cdot x + 28}$.

c) L'estimació del valor de les vendes per a les despeses de 35000 euros és:

$$\hat{y} = 7.6 \cdot 35 + 28 = 294 \Longrightarrow \boxed{294000 \text{ euros}}.$$



3. Resoleu les qüestions següents:

a) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts $A(0,3)$ i $B(-3,1)$. Quins són el seu pendent i els seus punts de tall amb els eixos de coordenades.

b) Resoleu i representeu gràficament el sistema d'equacions $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + \dfrac{13}{2}\,. \end{cases}$

c) Utilitzeu el mètode de completar quadrats per trobar el nombre real x, tal que l'expressió $x^2 + 7x - 2$ té valor mínim. Digueu, també, quin és aquest valor mínim.

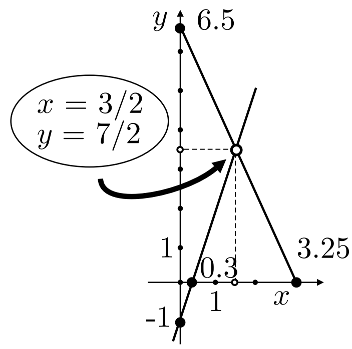
a) $\dfrac{x-0}{0-(-3)} = \dfrac{y-3}{3-1} \iff \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-3}{2} \iff \boxed{y = \dfrac{2}{3}x + 3}.$

El seu pendent és $\dfrac{2}{3}$ i els talls amb els eixos són $(0,3)$ i $\left(-\dfrac{9}{2}, 0\right)$. (Aquests últims surten d'igualar, respectivament, x i y a zero.)

b) Resolem pel mètode d'igualació:

$$3x - 1 = -2x + \frac{13}{2} \implies 5x = 1 + \frac{13}{2} \implies 5x = \frac{15}{2}$$

$$\implies \boxed{x = \frac{3}{2} \ \text{ i } \ y = \frac{7}{2}}.$$



c) Transformem l'expressió en una més fàcil d'estudiar, utilitzant la identitat notable del quadrat d'un binomi:

$$x^2 + 7x + 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{57}{4}$$

Observem que la part variable $\left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 \geq 0$. Llavors el valor mínim s'obté quan la part variable es fa igual a zero, és a dir quan $x + \dfrac{7}{2} = 0$. Per tant, el mínim s'obté en

$$\boxed{x = -\frac{7}{2}}, \ \text{ i el seu valor és } 0^2 - \frac{57}{4} = \boxed{-\frac{57}{4}}.$$