1. S'han preguntat les edats d'una mostra escollida a l'atzar de 400 persones que corrien en una cursa popular amb 5800 participants. N'ha resultat la taula de respostes adjunta.

a) Calculeu la mediana de la mostra.
b) Quina és l'edat tal que el 50% de les persones de la mostra no la supera i l'altre 50% la supera.
c) Calculeu el percentatge de persones de la mostra que no supera els 42 anys.
d) Calculeu la mitjana i la desviació estàndard de la variable.

Edat	Nombre de persones
[15 , 25)	78
[25 , 35)	160
[35 , 45)	94
[45 , 55)	45
[55 , 65)	23

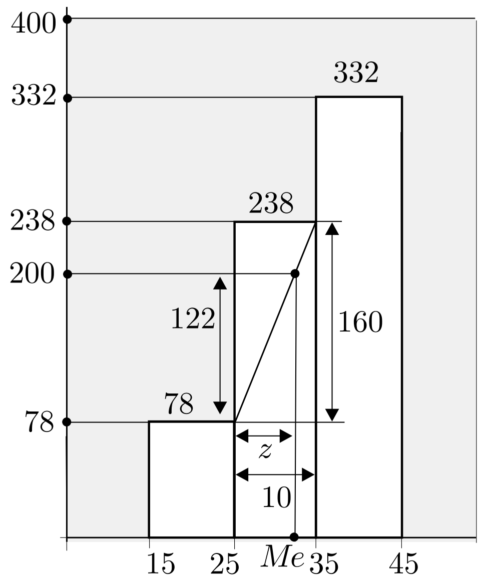
e) Si els professionals que han triat la mostra ens han dit que, segons els seus estudis, aquesta és força representativa de la població que corre la cursa, calculeu aproximadament quantes d'aquestes persones no superen els 42 anys.

a)

m_i	n_i	N_i	$m_i \cdot n_i$	$m_i \cdot n_i^2$
20	78	78	1560	31200
30	160	238	4800	144000
40	94	332	3760	150400
50	45	377	2250	112500
60	23	400	1380	82800
	400		13750	520900

$$\mathbf{Me} = 25 + z, \text{ en què } \frac{z}{35-25} = \frac{200-78}{238-78}.$$

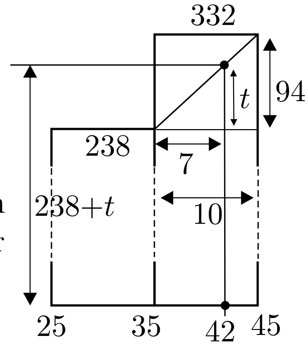
Consegüentment, $\mathbf{Me} = 25 + \dfrac{10 \cdot 122}{160} \approx \boxed{32.625}$.



b) Aquesta és la definició de mediana. Per tant l'edat és, aproximadament, $\boxed{\text{32.6 anys.}}$

c) Calculem el valor de t en el gràfic:

$$\frac{t}{42-35} = \frac{332-238}{45-35} \Longrightarrow t = \frac{7 \cdot 94}{10} = 65.8\,.$$



Per tant, hi ha $238 + 65.8 = 303.8$ observacions en què no se superen els 42 anys. Correspon a una freqüència relativa acumulada de valor $\dfrac{303.8}{400} = 0.7595$, és a dir un $\boxed{75.95\%}$.

d) $\bar{x} = \dfrac{13750}{400} = \boxed{34.375}$. $\quad \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum m_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{520900}{400} - 1181.640625} \approx \boxed{10.9822}$.

e) Que sigui força representativa del total de corredors implica que, força aproximadament, un 75.95%, (segons l'apartat (c)), del total de 5800 corredors no supera els 42 anys. Per tant,

$$0.7595 \cdot 5800 = 4405.1 \approx \boxed{4405 \text{ corredors}}.$$

2. En la taula adjunta teniu les les mesures en cm de l'estatura de 6 nadons i la seva circumferència frontal-occipital.

X : Estatura en cm	47	49	50	50	52	52
Y : Circumferència f.o. en cm	34	34	37	36	37	38

Sabem que $\bar{x} = 50$, $\sigma_x^2 = 3$, $\bar{y} = 36$ i $\sigma_y^2 = \dfrac{7}{3}$.

a) Trobeu el coeficient de Pearson a partir de les desviacions típiques i la covariància. Utilitzant aquest coeficient, raoneu sobre el grau, sentit i tipus de la correlació.

b) Trobeu l'equació de la recta de regressió de Y sobre X i representeu-la gràficament junt amb el núvol de punts de la distribució bidimensional.

c) Feu una estimació del perímetre frontal-occipital per a un nadó de 50 cm d'estatura.

a) Càlcul de la covariància $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{8} - \bar{x} \cdot \bar{y}$, (observem que $i = j$ i $n_{ij} = 1$):

x_i	y_j	$x_i \cdot y_j \cdot 1$
47	34	1598
49	34	1666
50	36	1800
50	37	1850
52	37	1924
52	38	1976
		10814

$\Longrightarrow$

$$\sigma_{xy} = \frac{10814}{6} - 50 \cdot 36 = \frac{7}{3} = 2.\widehat{3}$$

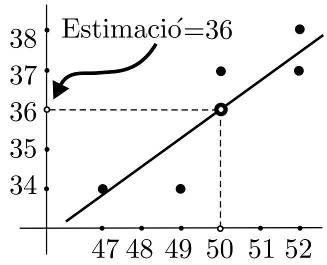
$$\Longrightarrow r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{7/3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7/3}} \approx 0.882\,.$$

Aquest valor de r indica correlació lineal de grau bastant fort i sentit positiu.

La recta de regressió de y sobre x és:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \Longleftrightarrow y - 36 = \frac{7/3}{3}(x - 50)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y = \frac{7}{9} \cdot x - \frac{26}{9}}.$$



b) L'estimació del perímetre per a un nadó de 50 cm és:

$$\hat{y} = \frac{7}{9} \cdot 50 - \frac{26}{9} = \boxed{36 \text{ cm}}.$$

Això concorda amb que la recta de regressió ha de passar pel punt determinat per les mitjanes ($\bar{x} = 50\,, \ \bar{y} = 36$).

3. Donades les equacions

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -\dfrac{1}{2}\,x + 6\,. \end{cases}$$

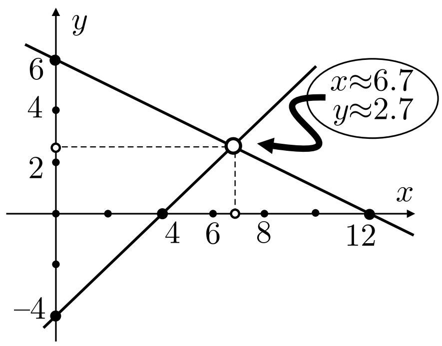
a) Trobeu els punts de tall dels seus gràfics amb els eixos de coordenades i utilitzeu-los per representar les rectes que representen sobre uns mateixos eixos. Expliqueu si els valors dels pendents coincideixen en les equacions i en els gràfics.

b) Resoleu el sistema que formen les dues equacions i expliqueu si la solució coincideix amb el que s'observa en els gràfics anteriors.

a) Talls amb els eixos.

$y = x - 4$

$$\begin{cases} \text{Tall } OY: x = 0 \Longrightarrow y = 0 - 4 = -4 \Longrightarrow (0, -4) \\ \text{Tall } OX: y = 0 \Longrightarrow 0 = x - 4 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow (4, 0) \end{cases}$$



$y = -\dfrac{1}{2}\,x + 6$

$$\begin{cases} \text{Tall } OY: x = 0 & \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 6 = 6 \Longrightarrow (0, 6) \\ \text{Tall } OX: y = 0 & \Longrightarrow 0 = -\frac{1}{2}\,x + 6 \Longrightarrow \frac{1}{2}\,x = 6 \\ & \Longrightarrow x = 6 \cdot 2 = 12 \Longrightarrow (12, 0) \end{cases}$$

En la primera recta, quan ens desplacem entre els dos punts de tall tenim pendent $\dfrac{4}{4} = 1$.

En la segona recta, quan ens desplacem entre els dos punts de tall tenim pendent $\dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2}$.

Aquest pendents coincideixen amb els coeficients de la variable x en l'equació explícita.

b) Resolem el sistema pel mètode d'igualació:

$$x - 4 = -\frac{1}{2}\,x + 6 \quad\Longrightarrow\quad 2x - 8 = -x + 12 \Longrightarrow 3x = 20$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{20}{3}\,, \qquad y = \frac{20}{3} - 4 = \frac{8}{3}}\,.$$

Observem que la solució coincideix amb el punt d'intersecció de les dues rectes:

$$x = \frac{20}{3} \approx 6.\overset{\frown}{7} \qquad y = \frac{8}{3} \approx 2.\overset{\frown}{7}\,.$$