1. Discutiu i resoleu el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & -5 \\ -5x & + & 3y & + & az & = & 3a+2 \end{array}\right.$

Discussió i resolució pel mètode de Gauss:

Treballem amb la matriu A del sistema i la matriu $A|B$ ampliada. Si apliquem el mètode de Gauss pivotant sobre els coeficients emmarcats obtenim els sistemes equivalents següents:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{3} & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & a & 3a+2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{7} & -13 & -31 \\ 0 & 14 & 3a+10 & 9a+46 \end{array}\right) \iff$$
$$\iff \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -13 & -31 \\ 0 & 0 & 21a+252 & 63a+756 \end{array}\right).$$

Llavors, es poden donar els casos següents:

- $21a+252=0 \iff \mathrm{r}(A)=2 \text{ i } a=-12 \iff \mathrm{r}(A)=2 \text{ i } 63a+756 = 63\cdot(-12)+756=0 \iff \mathrm{r}(A)=2=\mathrm{r}(A|B).$
- $21a+252\neq 0 \iff \mathrm{r}(A)=3 \text{ i } a\neq -12 \iff \mathrm{r}(A)=3=\mathrm{r}(A|B).$

És a dir que $\boxed{\begin{array}{l} a=-12 \iff \text{Compatible indeterminat } (n-r=3-2=1 \text{ paràmetre}). \\ a\neq 12 \iff \text{Compatible determinat.} \end{array}}$.

- Solució quan $a=-12$:

Tenim el sistema $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -13 & -31 \end{array}\right)$, en què considerem $z=\lambda\in\mathbb{R}$. Llavors,

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-31+13\lambda}{7} \\ x=\dfrac{8-\frac{-31+13\lambda}{7}-2\lambda}{3}=\dfrac{29-9\lambda}{7} \end{array}\right\}, \quad \text{és a dir, } \boxed{x=\frac{29}{7}-9\,\alpha,\ y=-\frac{31}{7}+13\,\alpha,\ z=7\alpha}.$$

- Solució quan $a\neq -12$:

$$\left.\begin{array}{l} z=\dfrac{63a+756}{21a+252}=3 \\ y=\dfrac{-31+13\cdot 3}{7}=\dfrac{8}{7} \\ x=\dfrac{8-\frac{8}{7}-2\cdot 3}{3}=\dfrac{2}{7} \end{array}\right\}, \quad \text{és a dir, } \boxed{x=\frac{2}{7},\ y=\frac{8}{7},\ z=3}.$$

Discussió i resolució mitjançant l'aplicació de la teoria de determinants:

$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \iff \mathrm{r}(A) \geq 2$. El valor de l'únic menor resultant d'orlar M ens permetrà determinar $\mathrm{r}(A)$.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -5 & 3 & a \end{vmatrix} = 7a + 84$. Es presenten els casos:

- $7a + 84 = 0 \iff \mathrm{r}(A) = 2$ i $a = -12$
- $7a + 84 \neq 0 \iff \mathrm{r}(A) = 3$ i $a \neq -12 \iff \mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}(A|B)$.

En el primer cas ($a = -12$), per calcular $r(A|B)$, calculem la única orla que queda:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & -34 \end{vmatrix} = 0 \iff \mathrm{r}(A|B) = 2 = \mathrm{r}(A)$. És a dir que, com abans,

$$\boxed{\begin{array}{l} a = -12 \iff \text{ Compatible indeterminat } (n - r = 3 - 2 = 1 \text{ paràmetre}). \\ a \neq 12 \iff \text{ Compatible determinat.} \end{array}}$$

.

Per a la resolució, si utilitzem la regla de Cramer, obtenim:

- $a = -12$:

$$\left.\begin{array}{rcl} & z = \lambda & \\ 3x \; + & y = & 8 - 2\lambda \\ 2x \; + & 3y = & -5 + 3\lambda \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 - 2\lambda & 1 \\ -5 + 3\lambda & 3 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{29 - 9\lambda}{7}, \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 8 - 2\lambda \\ 2 & -5 + 3\lambda \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{-31 + 13\lambda}{7}, \\ z = \lambda. \end{array}\right.$$

- $a \neq -12$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3a + 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{7a + 84} = \frac{2a + 24}{7a + 84} = \frac{2(a + 12)}{7(a + 12)} = \frac{2}{7},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ -5 & 3a + 2 & a \end{vmatrix}}{7a + 84} = \frac{8a + 96}{7a + 84} = \frac{8(a + 12)}{7(a + 12)} = \frac{8}{7},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 3a + 2 \end{vmatrix}}{7a + 84} = \frac{21a + 252}{7a + 84} = \frac{21(a + 12)}{7(a + 12)} = 3.$$

2. Calculeu de manera raonada el valor del determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 2 & 1 & m \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix}$.

Farem les combinacions lineals i substitucions indicades a la dreta en què F_i significa fila i-èssima. En ser els coeficients de les files substituïdes iguals a 1, el determinant que en resulta és igual a l'inicial perquè cal multiplicar-lo pel factor $\dfrac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$. El càlcul final es farà desenvolupant per la última columna:

$$\begin{array}{lcl} 1 \cdot F_4 - 1 \cdot F_3 & \longrightarrow & F_4 \\ 1 \cdot F_3 - 1 \cdot F_2 & \longrightarrow & F_2 \\ 1 \cdot F_2 - 1 \cdot F_1 & \longrightarrow & F_4 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 2 & 1 & m \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = m(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-m}.$$

3. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Trobeu la matriu X tal que $A \cdot X = B$.

Si multipliquem per l'esquerra dels dos costats de la igualtat per la matriu inversa A^{-1} tenim $X = A^{-1} \cdot B$. Caldrà, doncs, calcular prèviament A^{-1}. Utilitzem el mètode de resoldre plegats tres sistemes d'equacions per Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Finalment, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$.