IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT A2
Límits
22/X/2002

NOM: ______________________

Puntuació: ______________________

1. Donada la successió $a_n = \dfrac{2n}{5n-3}$

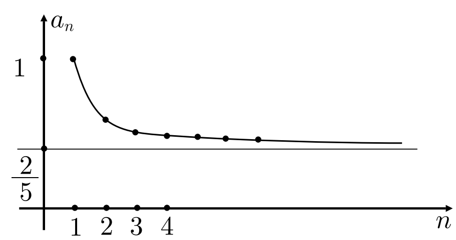
a) Trobeu els termes continguts en un entorn de centre 0.401 i radi 0.002. A partir del resultat raoneu la possibilitat que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.401$.

b) Feu un gràfic de la successió i trobeu les seves cotes, suprem, ínfim, màxim i mínim.

a)
$$\begin{aligned} a_n \in E_{0.002}(0.401) &\iff 0.399 < \frac{2n}{5n-3} < 0.403 \iff \\ &\iff 1.995n - 1.197 < 2n < 2.015n - 1.209 \iff \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} 0.005n > -1.197 \\ 0.015n > 1.209 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} n > -239.4 \\ n > 80.6 \end{array} \right. \iff n \geq 81. \end{aligned}$$

Conclusió: En aquest entorn trobem el terme a_{81} i tots els que el segueixen. En contenir infinitat de termes a partir del a_{81}, és possible que el límit pugui ser 0.401 o qualsevol altre nombre contingut en aquest entorn.

b) S'observa que el gràfic és un tros de branca d'una hipèrbola equilàtera, i la successió és decreixent amb límit $\frac{2}{5}$. Per tant,



C.s.$= [a_1, +\infty[= [1, +\infty[$	Suprem$= 1$
C.i.$=]-\infty, \frac{2}{5}]$	Ínfim$= \frac{2}{5}$
Màxim$= 1$	Mínim, no existeix.

2. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu la igualtat següent per inducció:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

b) Donada la successió $x_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \cdots + \dfrac{2}{3^n}$, justifiqueu que $x_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$, i calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{3^{n-2}}$.

a) Per a $n = 1$ és certa, perquè $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \cdot 2 = 2 \\ a_1 = 2 + (1-1) \cdot 2^2 = 2 + 0 = 2. \end{array} \right.$

Si suposem que és certa per a $n = k$, també ho és per a $n = k+1$ perquè

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} &= 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1} = \\ &= 2 + (k-1+k+1)2^{k+1} = 2 + 2k \cdot 2^{k+1} = 2 + k \cdot 2^{k+2}. \end{aligned}$$

b) x_n és la suma de n termes d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{3}$ i primer terme igual a $\frac{2}{3}$. Per tant,

$$x_n = \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

Llavors, en ser $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{3^n} = 1 - \dfrac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1, \\ \lim_{n\to\infty} 3^{n-2} = 3^{+\infty} = +\infty, \end{cases}$

obtenim

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{3^{n-2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 3^{n-2}\left(1-\frac{1}{3^n}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{3^{n-2}}{3^n}} = e^{-(3^{-2})} = \boxed{e^{-\frac{1}{9}}}.$$

3. Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{3-\sqrt{8-x}}{x^3+1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{-5}{2}} \left(\frac{2x+5}{8x^3+10x^2-23x+5}\right)^{\frac{(1+x)}{(4x+10)^2}}$

a)Utilitzant la regla de Fubbini obtenim $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Per tant,

$$\lim_{x\to -1} \frac{3-\sqrt{8-x}}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{9\cancel{-8+x}}{(x^2-x+1)\cancel{(x+1)}(3+\sqrt{8-x})} = \frac{1}{3\cdot(3+3)} = \boxed{\frac{1}{18}}.$$

b) Les arrels del polinomi $8x^3+10x^2-23x+5$ són 1, $\frac{1}{4}$ i $\frac{-5}{2}$. Llavors, podrem escriure

$$8x^3+10x^2-23x+5 = 8\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1) \quad \text{i} \quad 2x+5 = 2\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to \frac{-5}{2}} \left(\frac{2x+5}{8x^3+10x^2-23x+5}\right)^{\frac{(1+x)}{(4x+10)^2}} = \lim_{x\to \frac{-5}{2}} \left(\frac{2\cancel{\left(x+\frac{5}{2}\right)}}{8\left(x-\frac{1}{4}\right)\cancel{\left(x+\frac{2}{5}\right)}(x-1)}\right)^{-\infty} =$$

$$= \left(\frac{2}{77}\right)^{-\infty} = \left(\frac{77}{2}\right)^{+\infty} = \boxed{+\infty}.$$

4. Definiu una funció racional, —una fracció de polinomis—, tal que la recta $y = 1$ sigui asímptota horitzontal i el gràfic del polinomi numerador sigui la paràbola que passa pels punts $(3,0)$ i $(-3,0)$ amb vèrtex en el $(0,-9)$.

- Que passi pels punts $(3,0)$ i $(-3,0)$ implica que el polinomi numerador és
$$a(x-3)(x+3) = a(x^2-9).$$
- Que el vèrtex estigui en el punt $(0,-9)$ implica que
$$a\cdot(0^2-9) = -9 \text{ i, per tant, } a = 1.$$
- Que $y = 1$ sigui asímptota horitzontal implica que el polinomi denominador sigui del tipus x^2+bx+c, perquè així el límit de la funció en el infinit és 1.

Llavors, una col·lecció de funcions que satisfan l'enunciat és $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2+bx+c}$.

Una de concreta l'aconseguim donant valors a la b i a la c. Per exemple, $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}}$.