IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT A
Límits
22/X/2002

NOM: ____________________

Puntuació: ____________________

---

1. Donada la successió $a_n = \dfrac{n}{4n-1}$

a) Trobeu els termes continguts en un entorn de centre 0.3 i radi 0.045. A partir del resultat raoneu la possibilitat que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.3$.

b) Feu un gràfic de la successió i trobeu les seves cotes, suprem, ínfim, màxim i mínim.

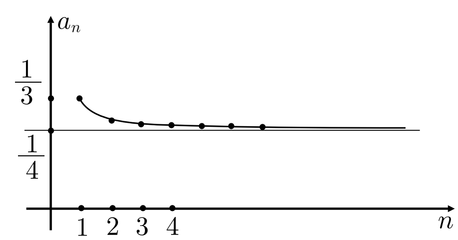
a)

$$\begin{aligned}
a_n \in E_{0.045}(0.3) &\iff 0.255 < \frac{n}{4n-1} < 0.345 \iff \\
&\iff 1.02n - 0.255 < n < 1.38n - 0.345 \iff \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 0.02n < 0.255 \\ 0.38n > 0.345 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} n < 12.75 \\ n > 0.908 \end{array}\right. \iff 1 \le n \le 12.
\end{aligned}$$

Conclusió: En aquest entorn trobem des del terme a_1 al a_{12} i, en contenir només aquests termes, el límit de la successió no serà 0.3.

b) Com es pot observar, el gràfic és un tros de branca d'una hipèrbola equilàtera, i la successió és decreixent amb límit $\frac{1}{4}$. Per tant,

C.s.$=[a_1,+\infty[=[\frac{1}{3},+\infty[$ Suprem$=\frac{1}{3}$
C.i.$=]-\infty,\frac{1}{4}]$ Ínfim$=\frac{1}{4}$
Màxim$=\frac{1}{3}$ Mínim, no existeix.



2. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu la igualtat següent per inducció:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) Donada la successió $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, justifiqueu que $x_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$, i calculeu $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{2^{n+1}}$.

a) Per a $n=1$ és certa, perquè $\left\{\begin{array}{l} a_1 = 1\cdot 2 = 2 \\ a_1 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = 2. \end{array}\right.$

Si suposem que és certa per a $n=k$, també ho és per a $n=k+1$ perquè

$$\begin{aligned}
1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + k\cdot(k+1) + (k+1)\cdot(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)\cdot(k+2) = \\
&= (k+1)\cdot(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.
\end{aligned}$$

b) x_n és la suma de n termes d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{2}$ i primer terme igual a $\frac{1}{2}$. Per tant,

$$x_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Llavors, en ser $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1, \\ \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} = 2^{+\infty} = +\infty, \end{cases}$

obtenim

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{2^{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^n}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \boxed{e^{-2}}.$$

3. Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{4-\sqrt{21-x}}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-2}\right)^{\frac{x-1}{(4x-2)^2}}$

a)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x(x-5)}{4-\sqrt{21-x}} = \lim_{x\to 5} \frac{x\cancel{(x-5)}(4+\sqrt{21-x})}{\cancel{16-21+x}} = \lim_{x\to 5} \left[x\left(4+\sqrt{21-x}\,\right)\right] = 5\cdot 8 = \boxed{40}.$$

b) Les arrels del polinomi $6x^2-5x+1$ són $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$. Les arrels del polinomi $2x^2+3x-2$ són -2 i $\frac{1}{2}$. Per tant

$$6x^2-5x+1 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \quad \text{i} \quad 2x^2+3x-2 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2).$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-2}\right)^{\frac{x-1}{(4x-2)^2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(\frac{6\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}(x+2)}\right)^{-\infty} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\infty} = \boxed{+\infty}.$$

4. Definiu una funció racional, —una fracció de polinomis—, que talli l'eix d'ordenades en $y=3$, i tal que $x=-2$ sigui asímptota vertical i $y=1$ sigui asímptota horitzontal.

Pot ser una hipèrbola equilàtera ´definida per $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

- A.V. en $x=-2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2}(cx+d) = 0 \Longrightarrow d = 2c.$
- A.H. en $y=1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax+b}{cx+2c} = 1 \Longrightarrow \dfrac{a}{c} = 1 \Longrightarrow a = c.$
- Si el gràfic passa pel $(0,3)$ tenim $3 = f(0) = \dfrac{a\cdot 0+b}{a\cdot 0+2a} = \dfrac{b}{2a} \Longrightarrow b = 6a.$

Llavors una col·lecció de funcions que satisfan l'enunciat és $f(x) = \dfrac{ax+6a}{ax+2a}$.

Una de concreta l'aconseguim donant valors a la a. Per exemple, $\boxed{f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}}$.