1. Discutiu i resoleu el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0\\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7\\ 3x & - & y & + & 5z & = & 14\\ x & + & 8y & + & az & = & a \end{array}\right.$

Discussió i resolució pel mètode de Gauss:

Treballem amb la matriu A del sistema i la matriu $A|B$ ampliada. Si apliquem el mètode de Gauss pivotant sobre els coeficients emmarcats obtenim els sistemes equivalents següents:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 7\\ 3 & -1 & 5 & 14\\ 1 & 8 & a & a \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{-5} & 1 & 7\\ \cancel{0} & \cancel{-10} & \cancel{2} & \cancel{14}\\ 0 & 5 & a-1 & a \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -5a & -5a-35 \end{array}\right).$$

Llavors, si observem el nombre de files independents en les matrius esglaonades que resulten, es poden donar els casos següents:

- $a = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 2$ i $\mathrm{r}(A|B) = 3$
- $a \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}(A|B)$.

És a dir que, pel teorema de Rouché, $\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \Longleftrightarrow \text{ Incompatible.}\\ a \neq 0 \Longleftrightarrow \text{ Compatible determinat.} \end{array}}$.

- Solució quan $a \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{-5a-35}{a} = \dfrac{a+7}{a}\\ y = \dfrac{7 - \dfrac{a+7}{a}}{-5} = \dfrac{7-6a}{5a}\\ x = -3\dfrac{7-6a}{5a} - \dfrac{a+7}{a} = \dfrac{13a-56}{5a} \end{array}\right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{x = \frac{13a-56}{5a},\ y = \frac{7-6a}{5a},\ z = \frac{a+7}{a}}.$$

Discussió i resolució mitjançant l'aplicació de la teoria de determinants:

$M = \begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longleftrightarrow r(A) \geq 2$. Els valors dels menors que resulten d'orlar M ens permetran determinar $r(A)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5+27-2-3-30+3 = 0.$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & a \end{vmatrix} = a+9+16-1-6a-24 = -5a.$$

Es presenten els casos:

- $-5a = 0 \iff a = 0 \iff r(A) = 2.$
- $-5a \neq 0 \iff a \neq 0 \iff r(A) = 3.$

En el primer cas ($a = 0$), per trobar $r(A|B)$, calculem les orles que queden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 14+63+0-0-84+7 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0+21+0-0-0-56 \neq 0 \iff r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A).$$

En el segon cas ($a \neq 0$), l'única orla que queda per al càlcul de $r(A|B)$ és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \\ 1 & 8 & a & a \end{vmatrix} = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 2 & 14 \\ 0 & 5 & a-1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Hem fet les substitucions:
$1F_2 - 2F_1 \longrightarrow F_2$
$1F_3 - 3F_1 \longrightarrow F_3$
$1F_4 - 1F_1 \longrightarrow F_4$
i hem observat que la 2a i 3a fila de l'últim determinant són l.d.

Per tant $r(A|B) = r(A) = 3$. És a dir que, com abans,

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \iff \text{Incompatible.} \\ a \neq 0 \iff \text{Compatible determinat.} \end{array}}$$

Per a la resolució amb la regla de Cramer, del cas compatible determinat, obtenim:

- $a \neq 0$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ a & 8 & a \end{vmatrix}}{-5a} = \frac{-13a+56}{-5a} = \frac{13a-56}{5a},$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-5a} = \frac{6a-7}{-5a} = \frac{7-6a}{5a},$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & a \end{vmatrix}}{-5a} = \frac{-5a-35}{-5a} = \frac{a+7}{a}.$$

2. Si sabem que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, calculeu de manera raonada el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}.$$

- 1a resolució: En ser $\dfrac{1}{d}\,(c,0,d,0) = \left(\dfrac{c}{d},0,1,0\right) = \left(\dfrac{a}{b},0,1,0\right) = \dfrac{1}{b}\,(a,0,b,0)$, el determinant és igual a 0 per tenir dues files linealment dependents.
- 2a. resolució: Si desenvolupem per la 1a. fila i tenim present que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad - bc = 0$, obtenim:

$$a \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + b \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a(ad^2 - bdc) + b(c^2b - acd) = ad(ad - bc) + bc(bc - ad) = \\ &= (ad - bc)(ad - bc) = (ad - bc)^2 = 0^2 = 0. \end{aligned}$$

3. Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 1 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu X tal que $A \cdot X + B = C$.

Si sumem en els dos costats l'oposada de la matriu B i multipliquem, per l'esquerra dels dos costats de la igualtat resultant, per la matriu inversa A^{-1} tenim $X = A^{-1} \cdot (C - B)$. Caldrà, doncs, calcular prèviament A^{-1}. Utilitzem el mètode de resoldre plegats tres sistemes d'equacions per Gauss:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & -2 & 5 & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 16 & 0 & 0 & 2 & -34 & -4 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 5 & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{17}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(C - B) &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{17}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9-1 & 5-1 \\ 6-0 & 1-1 \\ -2-1 & 16-0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 - \frac{51}{4} + \frac{3}{4} & 5+0-4 \\ 0+3+0 & 0+0+0 \\ -2 + \frac{15}{4} - \frac{3}{4} & -1+0+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$