1. Estudieu les posicions relatives del pla i la recta següents, segons els diferents valors del paràmetre a:

$$\begin{cases} \pi : ax - y + z + 2 = 0 \\ r : \dfrac{x-1}{a-2} = \dfrac{y-5}{a-1} = \dfrac{z}{-1}\,. \end{cases}$$

Resolució1: La recta r té equacions paramètriques $r : \begin{cases} x = 1 + (a-2)\lambda \\ y = 5 + (a-1)\lambda \\ z = -\lambda. \end{cases}$.

Llavors, la intersecció $\pi \cap r$ vindrà determinada pels valors de $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfan les següents condicions equivalents:

$$\begin{gathered} a(1 + (a-2)\lambda) - 5 - (a-1)\lambda - \lambda + 2 = 0 \\ a + a^2\lambda - 2a\lambda - 5 - a\lambda + \lambda - \lambda + 2 = 0 \\ a^2\lambda - 3a\lambda + a - 3 = 0 \\ a(a-3)\lambda = -(a-3). \end{gathered}$$

En resulta una discussió en tres casos:

- $\boxed{a=3} \Longleftrightarrow 0 \cdot \lambda = 0 \Longleftrightarrow \forall\lambda$ és solució. $\Longleftrightarrow$
  $\Longleftrightarrow$ tots els punts de la recta r pertanyen al pla $\pi \Longleftrightarrow$
  $\Longleftrightarrow$ la recta r està **continguda** en el pla π, $(r \subset \pi)$.
- $\boxed{a=0} \Longleftrightarrow 0 \cdot \lambda = 3 \Longleftrightarrow \nexists\lambda \Longleftrightarrow$ la recta r i el pla π no tenen punts en comú $\Longleftrightarrow$
  $\Longleftrightarrow$ la recta r i el pla π són **paral·lels**, $(r \parallel \pi)$.
- $\boxed{a \neq 0 \text{ i } a \neq 3} \Longleftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{a} \Longleftrightarrow$ la recta r i el pla π es tallen en un punt $\Longleftrightarrow$
  $\Longleftrightarrow$ la recta r i el pla π són **secants**.

Resolució 2: Si cerquem les equacions implícites de la recta r, per estudiar les posicions relatives caldrà discutir el sistema

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & & & (a-2)z = & 1 \\ & & y & + & (a-1)z = & 5 \\ ax & - & y & + & z = & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 5 \\ a & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{F_3 - aF_1 \longrightarrow F_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & a-2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & a-1 & 5 \\ 0 & -1 & -a^2+2a+1 & -2-a \end{array}\right) \overset{F_3 + F_2 \longrightarrow F_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -a^2+3a & 3-a \end{array}\right).$$

Llavors, en ser $-a^2 + 3a = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ o $a = 3$, obtenim els casos següents:

- $\boxed{a \neq 0 \quad \text{i} \quad a \neq 3}$
  Les matrius A i $A|B$ són esglaonades de 3 files perquè $-a^2+3a \neq 0$ i $3-a \neq 0$.
  Per tant, $r(A) = r(A|B) = 3 =$nombre d'incògnites i el sistema té solució única.
  Consegüentment, la recta r i el pla π són **secants**.
- $\boxed{a = 0}$
  El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, i $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)$.
  Consegüentment, el sistema és incompatible i la recta r i el pla π són **paral·lels**.
- $\boxed{a = 3}$
  El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$, i $r(A) = 2 = r(A|B)$.
  Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació igual a 1.
  Consegüentment, la recta r està **continguda** en el pla π.

---

2. Considereu les rectes $\quad r: \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+z=2 \end{array}\right. \quad$ i $\quad s: \left\{\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 2\lambda. \end{array}\right.$

a) Estudieu la seva posició relativa.

b) Trobeu l'equació del pla que conté r i és paral·lel a s.

---

a) Recordem que dues rectes $\left\{\begin{array}{l} r:\ X = A+\lambda\vec{u}_r \\ s:\ X = B+\mu\vec{u}_s \end{array}\right.$ s'encreuen ssi $det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) \neq 0$. En ser les equacions paramètriques de $r: \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\lambda, \end{array}\right.$ tenim que **les rectes s'encreuen** perquè

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,2) \\ B(2,1,0) \\ \vec{u}_r(1,1,-1) \\ \vec{u}_s(-1,3,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = \left|\begin{array}{crr} 2-0 & 1 & -1 \\ 1-0 & 1 & 3 \\ 0-2 & -1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0.$$

b) **Resolució 1:** Sigui π el pla cercat. Els vectors $\vec{u}_r$ i $\vec{u}_s$ són de la direcció del pla π i linealment independents. El punt $A \in r \subset \pi$ és del pla π. Per tant, els punts $X \in \pi$ satisfan l'equació

$$0 = det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AX}) = \left|\begin{array}{rcc} 1 & -1 & x-0 \\ 1 & 3 & y-0 \\ -1 & 2 & z-2 \end{array}\right|, \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{5x-y+4z-8=0}.$$

Resolució 2: Considerem el feix de plans que conté la recta r, i sigui π el pla cercat:

$$\alpha(x-y)+x+z-2=0 \quad \text{o} \quad x-y=0.$$

La intersecció del pla π amb la recta s no té solució. Llavors, no pot existir cap $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfagui l'equació

$$(\alpha+1)(2-\lambda)-\alpha(1+3\lambda)+2\lambda-2=0, \quad \text{és a dir,} \quad \lambda(1-4\alpha)=-\alpha.$$

L'única possibilitat que no existeixi λ, és que $1-4\alpha=0$, és a dir, $\alpha=\dfrac{1}{4}$. Per tant, l'equació del pla π és

$$\frac{1}{4}(x-y)+x+z-2=0, \quad \text{la qual equival a} \quad \boxed{5x-y+4z-8=0}.$$

El pla $x-y=0$, no és paral·lel perquè $2-\lambda-(1+3\lambda)=0$ té solució $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

3. Considereu el tetraedre $ABCD$. Siguin

P: punt mitjà de l'aresta AB.
Q: punt mitjà de l'aresta BC.
$\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$: sistema de referència.

a) Trobeu les coordenades de A, B, C, D, P i Q.

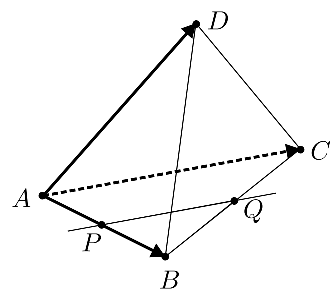
b) Trobeu l'equació del feix de plans que conté la recta PQ.

c) Trobeu l'equació de la recta que conté l'aresta AC.

d) Demostreu que tots els plans del feix trobat a l'apartat (b), són paral·lels a la recta trobada a l'apartat (c), amb una única excepció.

a) Anomenem $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}, \vec{e}_2=\overrightarrow{AC}, \vec{e}_3=\overrightarrow{AD}$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA} &= 0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3 \Longrightarrow A=(0,0,0)\\
\overrightarrow{AB} &= 1\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3 \Longrightarrow B=(1,0,0)\\
\overrightarrow{AC} &= 0\vec{e}_1+1\vec{e}_2+0\vec{e}_3 \Longrightarrow C=(0,1,0)\\
\overrightarrow{AD} &= 0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+1\vec{e}_3 \Longrightarrow D=(0,0,1)\\
\overrightarrow{AP} &= \tfrac{1}{2}\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3 \Longrightarrow P=\left(\tfrac{1}{2},0,0\right)\\
\overrightarrow{BQ} &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) \Longrightarrow Q=B+\overrightarrow{BQ}=\\
&= (1,0,0)+\tfrac{1}{2}((0,1,0)-(1,0,0))=\\
&= (1,0,0)+\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right)
\end{aligned}$$



b) recta PQ: $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-0}{\frac{1}{2}-0}=\dfrac{z-0}{0-0}$, o bé, $\begin{cases} x-\frac{1}{2}=0\\ z=0.\end{cases}$

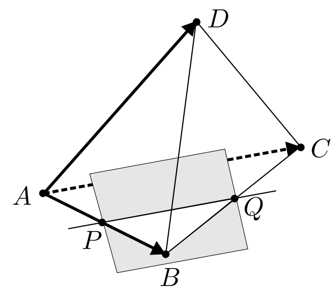
El feix de plans tindrà l'equació $\boxed{2x-1+2\alpha z=0 \quad \text{o} \quad z=0}$.

c) $A(0,0,0)$ i $\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$ determinen la recta $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$, o bé, $\boxed{\begin{cases} x=0\\ z=0\end{cases}}$.

d) Fem la intersecció de la recta AC amb els plans de l'apartat (b):

$$2\cdot 0-1+2\alpha\cdot 0=-1\neq 0, \forall\alpha$$

En no existir solució per a cap α, els plans són paral·lels a AC. Queda un pla del feix per estudiar, el pla $z=0$. Com que els punts de la recta AC satisfan l'equació del pla, la recta AC està continguda en el pla $z=0$, és a dir el pla ABC.



Observacions

1. Sobre l'exercici 1

Si es vol resoldre l'exercici treballant amb les equacions implícites de r, s'ha d'estar segur que el seu rang és 2. D'aquesta manera, si considerem les equacions

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-1}{a-2} = \dfrac{y-5}{a-1} \\ \dfrac{x-1}{a-2} = \dfrac{z}{-1}\,, \end{array} \right.$$

l'estudi per al cas $a = 2$ s'ha de fer a part, perquè el sistema $r : \left\{ \begin{array}{l} x-1=0 \\ x-1=0\,, \end{array} \right.$ que en resulta, és de rang 1 i no és una recta sinó un pla.

De la mateixa manera, si considerem les equacions

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-1}{a-2} = \dfrac{y-5}{a-1} \\ \dfrac{z}{-1} \quad = \dfrac{y-5}{a-1}\,, \end{array} \right.$$

el cas $a = 1$ s'ha d'estudiar a part.

2. Sobre l'exercici 2a

Quan es pretén estudiar les posicions relatives de dues rectes a partir de les seves equacions implícites, cal justificar les diferències dels dos casos incompatibles. Concretament, si les rectes tenen equacions

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z = d_2\,, \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \pi_3 : \ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ \pi_4 : \ a_4x + b_4y + c_4z = d_4\,, \end{array} \right.$$

s'ha d'estudiar el sistema que té matrius associades:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Els dos casos incompatibles són
- $r(A) = 2, r(A|B) = 3$
- $r(A) = 3, r(A|B) = 4.$

Hem estudiat que això només pot significar que les rectes són paral·leles o s'encreuen. El cas paral·lel es caracteritza, a part de la no existència de punts comuns, per l'existència d'un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq (0,0,0)$ que és director de les dues rectes. Per tant, $\vec{v}$ és de la direcció dels plans $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ que determinen les dues rectes i haurà de ser solució del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z = 0\,, \end{array} \right.$$

Aquest sistema homogeni, per tenir solució diferent de $(0,0,0)$, ha de complir $r(A) < 3$, en què la matriu A coincideix amb la del sistema inicial. Consegüentment, si en el sistema inicial
– $r(A) = 2$ i $r(A|B) = 3$ llavors, les rectes són paral·leles,
– $r(A) = 3$ i $r(A|B) = 4$ llavors, les rectes s'encreuen.