1. Sabem que els tres plans

$$\begin{cases} \pi_1\colon\ x + y - az = -2 \\ \pi_2\colon\ 2x + y - 8z = -1 \\ \pi_3\colon\ -x - 2y + 10z = 5, \end{cases}$$

tenen, com a mínim, dos punts en comú. Trobeu les equacions paramètriques del lloc geomètric d'aquests punts i descriviu quin tipus d'objecte geomètric és.

Aquest sistema ha de tenir més d'una solució. Per tant, ha de ser compatible indeterminat, la qual cosa implica que $r(A) < 3$. És a dir,

$$r(A) < 3 \iff 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 10 + 8 + 4a - a - 16 - 20 = 3a - 18 \iff a = 6.$$

A més, per a $a = 6$, $r(A|B) = 2$ perquè

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 + 8 - 2 - 10 - 2 = 0.$$

Conseqüentment, les equacions paramètriques del lloc s'obtenen de la resolució del sistema:

$$\begin{cases} \pi_1\colon\ x + y - 6z = -2 \\ \pi_2\colon\ 2x + y - 8z = -1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Considerem $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3 - 4\lambda}{-1} \\[2ex] x = -2 + 6\lambda - \dfrac{3 - 4\lambda}{-1} \end{array}\right\}, \text{ és a dir, } \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}}.$$

El lloc geomètric és una recta que passa pel punt de coordenades $(\mathbf{1}, \mathbf{-3}, \mathbf{0})$ i té vector director $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{1})$.

2. Considereu la recta r i el pla π següents:

$$r: \; x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{5} \qquad\qquad \pi: \; \left\{\begin{array}{l} x=1-\alpha \\ y=-2+3\alpha \\ z=\lambda. \end{array}\right.$$

a) Trobeu les equacions implícites de la recta i el pla.

b) Comproveu que són paral·lels.

c) Trobeu la distància entre la recta i el pla.

d) Trobeu l'equació implícita dels dos plans que contenen la recta r i formen un angle $\omega = \arccos\left(\frac{\sqrt{85}}{34}\right) \approx 74°15'59.44''$, amb el pla π.

a) Recta r: Igualem la primera fracció amb la segona, i la primera amb la tercera. Obtenim el sistema de rang 2, és a dir les equacions implícites de la recta

$$\boxed{r: \left\{\begin{array}{l} 3x+y=3 \\ 5x-z=7 \end{array}\right.}.$$

Pla π: Eliminem el paràmetre α i, en ser la z lliure, obtenim

$$1-x=\alpha=\frac{y+2}{3} \Longleftrightarrow \boxed{\pi: \; 3x+y-1=0}.$$

b) Observem que no hi ha cap punt $(1+\lambda, -3\lambda, -2+5\lambda) \in r$ que pertanyi al pla π:

$$3(1+\lambda)-3\lambda-1=3+3\lambda-3\lambda-1=3-1=2\neq 0.$$

Per tant, r i π són paral·lels.

c) En ser r i π paral·lels i el punt $P(1,0,-2) \in r$, es compleix

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 1+0-1|}{\sqrt{3^2+1^2+0^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{10}}}.$$

d) Els plans cercats es troben entre els del feix de plans que contenen r. Si utilitzem les equacions implícites de r del primer apartat, es troben entre els plans:

$$3x+y-3+\beta(5x-z-7)=0 \qquad \text{o} \qquad 5x-z-7=0.$$

Busquem entre els primers. Aquests tenen el vector perpendicular $(3+5\beta, 1, -\beta)$. Aquest vector ha de formar un angle $\omega = \arccos\left(\frac{\sqrt{85}}{34}\right)$ amb el vector $(3,1,0)$ perpendicular al pla π. Per tant, obtenim les equacions equivalents següents:

$$\left|\frac{(3+5\beta,1,-\beta)\cdot(3,1,0)}{\sqrt{(3+5\beta)^2+1^2+(-\beta)^2}\cdot\sqrt{3^3+1^2+0^2}}\right| = \frac{\sqrt{85}}{34} \iff \left|\frac{10+15\beta}{\sqrt{26\beta^2+30\beta+10}}\right| = \frac{5}{\sqrt{34}} \iff$$

$$\iff \quad 26\beta^2+30\beta+10 = 34(2+3\beta)^2 \iff 140\beta^2+189\beta+63=0 \iff$$

$$\iff \quad 20\beta^2+27\beta+9=0 \iff \beta = \frac{-27\pm\sqrt{729-720}}{40} = \frac{-27\pm 3}{40} = \begin{cases} -\dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Finalment, els dos plans cercats són

$$3x+y-3-\frac{3}{5}(5x-z-7)=0 \qquad \text{i} \qquad 3x+y-3-\frac{3}{4}(5x-z-7)=0.$$

I, si eliminem els denominadors, en resulten

$$\boxed{5y+3z+6=0 \qquad \text{i} \qquad 3x-4y-3z-9=0}\,.$$

És immediat comprovar que l'altre pla $5x-z-7=0$ del feix no és solució perquè

$$\left|\frac{(5,0,-1)\cdot(3,1,0)}{\sqrt{5^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^3+1^2+0^2}}\right| = \frac{15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{10}} \neq \frac{\sqrt{85}}{34}\,.$$

3. Donats els punts $A(1,1,0)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,0,2)$ i $D(4,2,5)$, trobeu:

a) L'equació implícita del pla π que conté A, B i C.

b) El punt simètric del punt D respecte del pla π trobat en el primer apartat.

c) La distància entre la recta que conté el segment AB i la recta que conté el segment CD.

a) El pla π té vectors directors $\overrightarrow{AB}\,(1,2,1)$ i $\overrightarrow{AC}\,(-2,-1,2)$. Per tant, els punts $X(x,y,z)$ del pla π satisfan $\det(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$. És a dir,

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 5(x-1)-4(y-1)+3z=0 \iff \boxed{5x-4y+3z-1=0}\,.$$

b) En primer lloc cercarem la recta t perpendicular al pla π, pel punt D. En segon lloc calcularem les coordenades de $M=t\cap\pi$. Finalment, trobarem el punt $D'=D+2\overrightarrow{DM}$ simètric de D respecte del pla π.

- Recta t: El seu vector director és el vector $(5,-4,3)$ perpendicular al pla π. Per tant té les equacions paramètriques:

$$t: \begin{cases} x = 4+5\lambda \\ y = 2-4\lambda \\ z = 5+3\lambda. \end{cases}$$

- El punt M ve determinat per $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$5(4+5\lambda) - 4(2-4\lambda) + 3(5+3\lambda) - 1 = 0 \Longleftrightarrow 26 + 50\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{13}{25}.$$

O sigui que $M = t \cap \pi = \left(4 - \frac{13}{5}, 2 + \frac{52}{25}, 5 - \frac{39}{25}\right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{102}{25}, \frac{86}{25}\right)$.

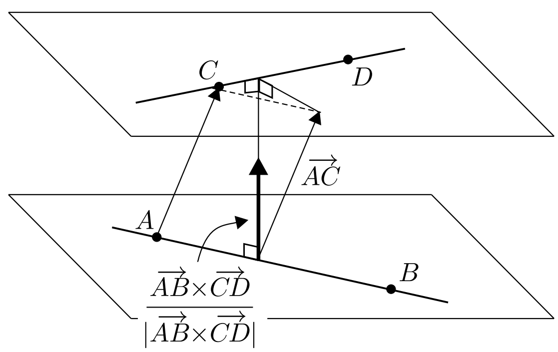
- Finalment, el punt simètric D' de D respecte del pla π és:

$$D' = D + 2(M - D) = 2M - D = \left(\frac{14}{5} - 4, \frac{204}{25} - 2, \frac{172}{25} - 5\right) = \boxed{\left(-\frac{6}{5}, \frac{154}{25}, \frac{47}{25}\right)}.$$

c) Les rectes AB i CD s'encreuen perquè

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 - 12 + 4 - 20 + 3 = -26 \neq 0.$$

Llavors, podem trobar la distància entre les rectes calculant el valor absolut de la projecció del vector $\overrightarrow{AC}$ sobre el vector unitari i perpendicular $\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$ a les dues rectes.



Per tant, hem de fer el càlcul,

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} \cdot \overrightarrow{AC} \right| = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} = \frac{|-26|}{\text{mòdul}\left(\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{26}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}^2}} = \frac{26}{\sqrt{16 + 4 + 64}} = \boxed{\frac{13}{\sqrt{21}}}.$$