IES Pons d'Icart — 5/XII/2002

Matemàtiques – 2n BAT A

Càlcul I — Puntuació: $(1 + 1.25 + 0.5) + 1 + (1.5 + 0.5) + (2 \cdot 0.75) + (2 \cdot 0.75) + 1.25$

1. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{11x+6}{4x^2 - x^3}$

a) Determineu les seves asímptotes i els seus talls amb els eixos.

b) Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius. (Mètode gràfic)

c) D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament el seu gràfic. (No calculeu ni utilitzeu la segona derivada)

a) Asímptota Horitzontal: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{11x+6}{4x^2-x^3} \overset{(R.H.)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{11}{8x-3x^2} = \frac{11}{-\infty} = 0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$.

Asímptotes Verticals:

$$\lim_{x\to 0} \frac{11x+6}{(4-x)x^2} = \frac{6}{4\cdot 0^+} = \frac{6}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \boxed{x=0}.$$

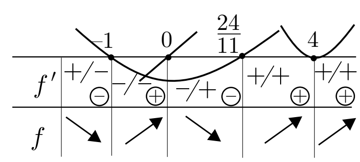
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{11x+6}{(4-x)x^2} = \frac{50}{0^+\cdot 16} = \frac{50}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{11x+6}{(4-x)x^2} = \frac{50}{0^-\cdot 16} = \frac{50}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x=4}.$$

Asímptota Oblíqua: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{11x+6}{4x^3-x^4} \overset{(R.H.)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{11}{12x^2-4x^3} = \frac{11}{-\infty} = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{No existeix}}$.

Talls OX: $y = 0 \Longrightarrow 11x+6 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{6}{11}$.

Tall OY: $x = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{6}{0} \Longrightarrow$ No existeix.

b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{11(4x^2-x^3) - (8x-3x^2)(11x+6)}{(4x^2-x^3)^2} = \\ &= \frac{x\left(44x - 11x^2 + 33x^2 + 18x - 88x - 48\right)}{x^4(x-4)^2} = \\ &= \frac{2\left(11x^2 - 13x - 24\right)}{x^3(x-4)^2}. \end{aligned}$$



- $\boxed{\text{Monòtona decreixent en }]-\infty,-1[\cup]0, \tfrac{24}{11}[.}$
- $\boxed{\text{Monòtona creixent en }]-1,0[\cup]\tfrac{24}{11},4[\cup]4,\infty[}$

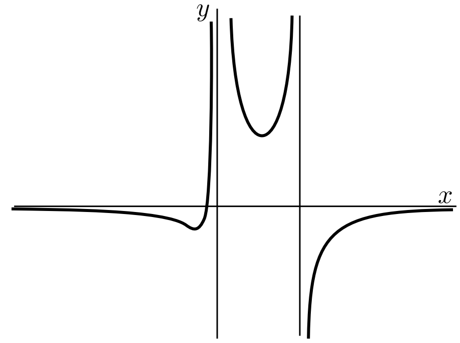
Extrems relatius:

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = \dfrac{24}{11}$. Si observem l'esquema de la monotonia aquests punts són extrems locals. El primer és mínim i el segon és màxim. Els seus valors són:

$$\boxed{f\left(\frac{24}{11}\right) \approx 3.47}$$

$$\boxed{f(-1) = -1}$$

c)



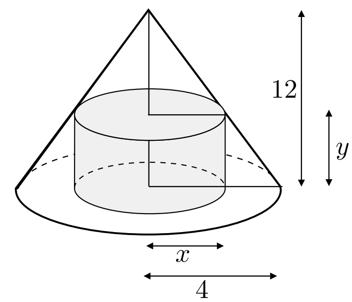
2. Calculeu els valors de λ tals que les tangents al gràfic de la funció $f(x) = x^3 - \lambda x^2$ en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = -1$ siguin perpendiculars entre si.

$f'(x) = 3x^2 - 2\lambda x \Longrightarrow$ el pendents de les rectes tangents són $\begin{cases} f'(1) = 3 - 2\lambda \\ f'(-1) = 3 + 2\lambda. \end{cases}$

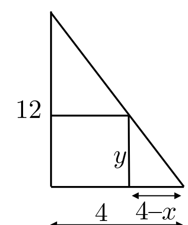
Llavors, en ser les rectes perpendiculars, $-1 = (3-2\lambda)(3+2\lambda) = 9-4\lambda^2$, i per tant, $\boxed{\lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}}$.

3. Considereu un con de radi 4 i altura 12. Trobeu el cilindre amb tapes, de superfície total màxima, que s'hi pot inscriure? Feu el mateix si el radi val 4 i l'altura val 6?

Indicació:
Superfície del cilindre = Superfície lateral + Superfície de les tapes = $2\pi xy + 2\pi x^2$.



La superfície S del cilindre depèn de les variables x i y. Primerament lligarem les dues variables a partir de la semblança de triangles, i després expressarem S en funció de x:

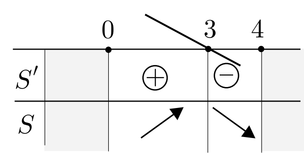


$$\frac{12}{4} = \frac{y}{4-x} \Longrightarrow y = 12 - 3x. \text{ Per tant,}$$

$$S(x) = 2\pi x(12 - 3x) + 2\pi x^2 = 4\pi(6x - x^2), \qquad 0 < x < 4.$$

Fem l'estudi de la monotonia i dels extrems:

$$S'(x) = 4\pi(6 - 2x) = 0 \Longrightarrow x = 3.$$



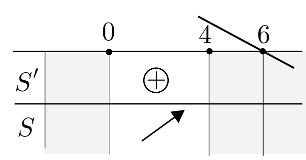
Segons l'esquema adjunt, existeix un màxim absolut quan el radi del cilindre és $\boxed{x = 3}$ i el valor de la superfície és $\boxed{S(3) = 36\pi}$.

Fem el mateix estudi per al cas en què l'altura del con val 6, en resulta:

$$S(x) = \pi(12x - x^2), \qquad 0 < x < 4.$$

Fem l'estudi de la monotonia i dels extrems:

$$S'(x) = \pi(12 - 2x) = 0 \Longrightarrow x = 6.$$



Segons l'esquema adjunt, $\boxed{\text{no existeix un màxim absolut}}$ de les superfícies. Aquest hauria d'estar en $x = 4$, però aquest punt no pertany al domini del problema. Concretament, quan $x = 4$ el cilindre ha "degenerat" en un disc. S'observa que les superfícies creixen amb el radi variable x i el seu suprem és $\lim_{x\to 4} S(x) = 32\pi$. Aquest valor coincideix amb la suma de les superfícies de les dues tapes que s'han superposat una sobre de l'altra i sobre la base del con.

4. Calculeu les funcions derivades de dues de les tres funcions següents:
a) $f(x) = \sin^2(5x)$ b) $g(x) = (x^4)^x$ c) $h(x) = \ln(x^4 - 2x^3 + x^2)$.

a) $f'(x) = 2\sin(5x)\cos(5x) \cdot 5 = \boxed{5\sin(10x)}$.

b) $\ln(g(x)) = 4x \ln x \Longrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 4\left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) \Longrightarrow g'(x) = \boxed{4x^{4x}(\ln x + 1)}$.

c) $h'(x) = \dfrac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \dfrac{4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)}{x^2(x-1)^2} = \dfrac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x(x-1)} = \boxed{\dfrac{4x-2}{x^2 - x}}$.

5. Resoleu dues de les tres qüestions següents:

a) Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2+8+14+\cdots+(6n-4)}{n\,\sqrt{4n^2+3}}$

b) Trobeu els punts d'inflexió de $f(x)=x^6-20x^4-135x^2$.

c) Calculeu el domini de la funció $f(x)=\sqrt{\ln(x^2-5x+7)}$.

a) Si sumem la progressió aritmètica del numerador, obtenim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(6n-4)}{2}\cdot n}{n\,\sqrt{4n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3}} \overset{(/n)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{4+0}} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

b) $f'(x)=6x^5-80x^3-270x \Longrightarrow f''(x)=30x^4-240x^2-270=30(x^4-8x^2-9)=30(x^2-9)(x^2+1)$.

L'últim pas es justifica, perquè $f''(x)=0 \Longleftrightarrow x^2=4\pm\sqrt{16+9}= \begin{array}{l}\nearrow\ 9\\ \searrow\ -1\end{array}$

Llavors, $f''(x)=0 \Longleftrightarrow \boxed{x=\pm 3}$. Aquests dos punts són d'inflexió perquè el factor x^2-9 canvia de signe en aquests punts i, per tant, també canvia de signe la segona derivada.

c) $x\in \mathrm{Dom}f \Longleftrightarrow \ln(x^2-5x+7)\geq 0 \Longleftrightarrow x^2-5x+7\geq 1 \Longleftrightarrow x^2-5x+6\geq 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \mathrm{Dom}f = \boxed{\,]-\infty,2\,]\cup[\,3,+\infty\,[\,}$.

6. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Trobeu tots els valors de λ per als quals és contínua la funció:

$$f(x)=\begin{cases} 1+e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, si } x<0\\ \sin(\lambda\pi+x) & \text{, si } x\geq 0\end{cases}$$

b) Estudieu la derivabilitat de la funció $f(x)=\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ en el punt $x=2$ i feu-ne la interpretació gràfica.

a) Les dues funcions són contínues en $x\neq 0$. per tant només cal imposar la continuïtat en $x=0$. S'haurà de complir:

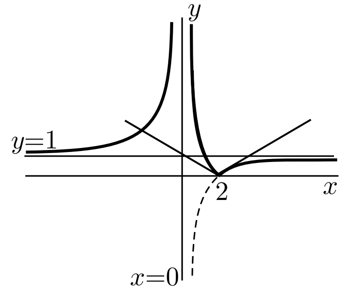
$$\lim_{x\to 0^-} 1+e^{-\frac{1}{x^2}} = f(0)=\sin(\lambda\pi+0)=\sin(\lambda\pi).$$

Llavors, $\sin(\lambda\pi)=1+e^{-\frac{1}{0^+}}=1+e^{-\infty}=1+0=1 \Longrightarrow \lambda\pi=\dfrac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{N}$. Conseqüentment,

$$\boxed{\lambda=\frac{1}{2}+2n,\ n\in\mathbb{N}}.$$

b) $f'(2)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{2+h-2}{2+h}\right|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{|2+h|\,h} \Longrightarrow$ hem d'examinar els límits laterals:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{|2+h|\,h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}}{|2+h|\,\cancel{h}}=\frac{1}{2}\\[2ex] \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{|2+h|\,h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\cancel{h}}{|2+h|\,\cancel{h}}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$



Per tant, $\boxed{\text{no existeix } f'(2)}$. En $x=2$ hi ha dues rectes tangents laterals, de pendents $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, que no coincideixen.