1. Discutiu i resoleu el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax &+& y &+& z &= 1\\ 4x &+& ay &+& 2z &= a\\ 4x &+& 2y &+& az &= a.\end{array}\right.$$

Discussió i resolució pel mètode de Gauss:

Treballem amb la matriu A del sistema i la matriu $A|B$ ampliada. En primer lloc, permutem la 1a. i 3a. files per aconseguir un pivot en el lloc $a_{11} \neq 0$. Si apliquem el mètode de Gauss, obtenim els sistemes equivalents següents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 2 & a & a\\ 4 & a & 2 & a\\ a & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_1 \longrightarrow F_2\\ 4F_3-aF_1\longrightarrow F_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & a & a\\ 0 & a-2 & 2-a & 0\\ 0 & 4-2a & 4-a^2 & 4-a^2\end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{a-2}F_2\longrightarrow F_2\\ \frac{1}{2-a}F_3\longrightarrow F_3\\ (a\neq 2)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & a & a\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2+a & 2+a\end{array}\right) \underset{F_3-2F_1\longrightarrow F_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & a & a\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a+4 & a+2\end{array}\right).$$

Llavors, si observem que $a+4=0 \Longleftrightarrow a=-4$, obtenim els casos següents:

- $\boxed{a \neq 2 \quad \text{i} \quad a \neq -4}$
  Les matrius A i $A|B$ són esglaonades de 3 files perquè $a+4 \neq 0$.
  Per tant, $r(A) = r(A|B) = 3$ =nombre d'incògnites.
  Conseqüentment el sistema és **compatible determinat**.
- $\boxed{a = -4}$
  El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$ i, per tant, $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)$.
  Conseqüentment el sistema és **incompatible**.
- $\boxed{a = 2}$

El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 2\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{array}\right)$ i, per tant, $r(A) = 1 = r(A|B)$.

Conseqüentment el sistema és **compatible indeterminat** amb grau d'indeterminació 2.

- Solució quan $a = 2$:

Tenim el sistema equivalent$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$, en què considerem $x = \lambda \in \mathbf{R}$, $y = \mu \in \mathbf{R}$. Llavors,

$$\boxed{x = \lambda,\ y = \mu,\ z = 1 - 2\lambda - \mu}.$$

- Solució quan $a \neq 2 \quad \text{i} \quad a \neq -4$:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{a+2}{a+4} \\ y &= \frac{a+2}{a+4} \\ x &= \frac{1}{4}\left(a - 2\,\frac{a+2}{a+4} - a\,\frac{a+2}{a+4}\right) = \\ &= -\frac{1}{a+4} \end{aligned}\right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{x = -\frac{1}{a+4},\ y = \frac{a+2}{a+4},\ z = \frac{a+2}{a+4}}.$$

Discussió i resolució mitjançant l'aplicació de la teoria de determinants:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - 12a + 16 = (a-2)^2(a+4).$$

En ser el rang igual a l'ordre del major menor no nul, es presenten els casos:

- $a \neq 2$ o $a \neq -4 \iff r(A) = 3 = r(A|B)$.
- $a = 2 \iff r(A) = r(2\ 1\ 1) = 1$ i $r(A|B) = r(2\ 1\ 1\ 1) = 1$.
- $a = -4 \iff r(A) = r\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 2$ i, en ser $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -72 \neq 0$, obtenim $r(A|B) = 3$.

De tot això en resulta la mateixa discussió que la feta abans. Passem a la resolució:

- $a = 2$:

$$\boxed{x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = 1 - 2\alpha - \beta.}$$

- $a \neq 2 \ \text{i} \ a \neq -4$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2 \\ a & 2 & a \end{vmatrix}}{(a-2)^2(a+4)} = \frac{-a^2+4a-4}{(a-2)^2(a+4)} = -\frac{(a-2)^2}{(a-2)^2(a+4)} = -\frac{1}{a+4}\,, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}}{(a-2)^2(a+4)} = \frac{a^3-2a^2-4a+8}{(a-2)^2(a+4)} = -\frac{(a-2)^2(a+2)}{(a-2)^2(a+4)} = \frac{a+2}{a+4}\,, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & a & a \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+4)} = \frac{a^3-2a^2-4a+8}{(a-2)^2(a+4)} = -\frac{(a-2)^2(a+2)}{(a-2)^2(a+4)} = \frac{a+2}{a+4}\,. \end{aligned}$$

2. Sigui el determinant $D(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

Trobeu el seu valor, expresseu-lo descompost en factors primers i estudieu-ne el signe de manera raonada.

$$D(x) \overset{x\neq 0}{=} \frac{1}{x^3}\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x^2-4 & 2x-4 & 2x-4 \\ 0 & 2x-4 & x^2-4 & 2x-4 \\ 0 & 2x-4 & 2x-4 & x^2-4 \end{vmatrix} = \frac{(x-2)^3}{x^3}\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x+2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & x+2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(x-2)^3}{x^3}\, x \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix} = \frac{(x-2)^3}{x^3}\, x\left(x^3+6x^2\right) = \boxed{(x-2)^3(x+6)}.$$

- Resolució més ràpida: Fem (1): $F_1+F_2+F_3+F_4 \longrightarrow F_1$ i (2): $\left\{\begin{array}{l} F_4-F_3 \longrightarrow F_4 \\ F_3-F_2 \longrightarrow F_2 \\ F_2-F_1 \longrightarrow F_1. \end{array}\right.$

$$D(x) \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+6 & x+6 & x+6 & x+6 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x-2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+6)(x-2)^3.$$

- Signe: Es pot estudiar a partir dels gràfics de les rectes $y = x+6$ i $y = x-2$, o bé algebraicament, la qual cosa farem a continuació:

$$\begin{aligned} D(x) > 0 &\iff (x+6>0 \text{ i } x-3>0) \text{ o } (x+6<0 \text{ i } x-3<0) \iff \\ &\iff x>3 \text{ o } x<-6 \iff \boxed{x \in\,]-\infty,-6\,[\cup]\,3,+\infty\,[}\,. \\ D(x) < 0 &\iff (x+6>0 \text{ i } x-3<0) \text{ o } (x+6<0 \text{ i } x-3>0) \iff \\ &\iff x+6>0 \text{ i } x-3<0 \iff \boxed{x \in\,]-6,3\,[}\,. \\ D(x) = 0 &\iff \boxed{x=-6,\ x=3}\,. \end{aligned}$$

3. Siguin els vectors de $\mathbb{R}^4$,

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1,2,3,0) \\ \vec{e}_2 = (-2,1,0,4) \\ \vec{e}_3 = (3,5,1,-1). \end{array}\right.$$

a) Proveu que són linealment independents i raoneu quin és el rang de la matriu que els té per files.

b) Cerqueu una combinació lineal de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$, que generi el vector $\vec{x} = (4,10,-6,1)$.

a) Que els tres vectors siguin linealment independents, és equivalent a que el rang de la matriu A que els té per files és 3. Això és així perquè el rang d'una matriu és igual al màxim nombre de files linealment independents. Aquest rang es pot calcular, entre d'altres maneres, cercant l'ordre del major menor no nul. Llavors, que A tingui tres files vol dir que $r(A) \leq 3$, i

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 55 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3 \Longrightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ l. i.}$$

- Resolució alternativa, a partir de la definició:

S'ha de veure que si es té una combinació lineal igual al vector $\vec{0}$ llavors, els coeficients de la combinació han de ser forçosament iguals a 0. És a dir,

$$\lambda_1(1,2,3,0) + \lambda_2(-2,1,0,4) + \lambda_3(3,5,1,-1) = (0,0,0,0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

En fer la combinació lineal igual a 0, tenim el sistema d'equacions en λ_i que té per matrius:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{F_2-2F_1 \longrightarrow F_2}{\scriptstyle F_3-3F_1 \longrightarrow F_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{5F_3-6F_2 \longrightarrow F_3}{\scriptstyle 5F_4-4F_2 \longrightarrow F_4}}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{-34F_4+F_3 \longrightarrow F_4}{}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -34 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

Els vectors són independents, perquè aquest sistema homogeni és compatible determinat i la seva única solució és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) S'han de trobar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tals que

$$(4, 10, -6, 1) = \alpha(1,2,3,0) + \beta(-2,1,0,4) + \gamma(3,5,1,-1).$$

S'obté el sistema d'equacions que té per matrius:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{F_2-2F_1 \longrightarrow F_2}{\scriptstyle F_3-3F_1 \longrightarrow F_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -8 & -18 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{5F_3-6F_2 \longrightarrow F_3}{\scriptstyle 5F_4-4F_2 \longrightarrow F_4}}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -34 & -102 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{\Longleftrightarrow}{\overset{-34F_4+F_3 \longrightarrow F_4}{}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -34 & -102 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

Aquest és un sistema compatible de rang 3, en què

$$\gamma = \frac{102}{34} = 3, \ \beta = \frac{2+3}{5} = 1, \ \alpha = 4 + 2 - 9 = -3.$$

Per tant, $\vec{x}$ és combinació lineal de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$, i s'expressa:

$$\boxed{\vec{x} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3}.$$