IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT A
Límits, continuïtat i derivabilitat
21/XI/2002

NOM: ______________________

Puntuació: ______________________

1. Raoneu la veritat o falsedat de tres de les quatre afirmacions següents:

a) Si qualsevol entorn del punt 3 conté un nombre infinit de termes de la successió a_n, llavors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

b) L'equació $e^x + 3x^2 = 6x$ té alguna solució entre 0 i 1.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x+1)}$ és discontínua en $x = 0$.

d) $f(x) = x \cdot e^x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

a) L'afirmació és <u>falsa</u> en general. Per assegurar que el 3 és límit s'ha de complir una altra condició: fora dels entorns esmentats només pot existir un nombre finit de termes, o bé cap terme. Un exemple de successió que compleix la hipòtesi de la condició i no té límit pot ser $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{n+1}$; en qualsevol entorn del punt 1 hi ha infinitat de termes i el límit no és 1.

b) Si considerem la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 6x$, es tracta d'esbrinar si té un zero en l'interval $[0,1]$. Observem que f és contínua en aquest interval i que $f(0) = 1 > 0$ i $f(1) = e - 3 < 0$. Per tant, el teorema de Bolzano ens permet assegurar que existeix un punt $\alpha \in]\,0,1\,[$ tal que $f(\alpha) = e^\alpha + 3\alpha^2 - 6\alpha = 0$ i, conseqüentment l'afirmació és <u>verdadera</u>.

c)Observem que $f(0) = \dfrac{1}{\log(0+1)} = \dfrac{1}{0}$ no existeix. Per tant, la funció no és contínua en $x = 0$ i l'afirmació és <u>verdadera</u>.

d) Per a $n = 1$ és veritat perquè $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$.

Si ho suposem cert per a n, tenim que per a $n+1$ també és cert perquè,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = 1 \cdot e^x + (x+n) \cdot e^x = (x+n+1) \cdot e^x.$$

Llavors, l'afirmació és <u>verdadera</u> $\forall n$.

2. Resoleu una de les qüestions següents:

a) Trobeu a i b si sabeu que: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+7+11+\cdots+(4n-1)}{a\cdot n^2+3}\right)^{b\cdot n} = \sqrt[3]{e}$

b) Sigui $f(x) = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, Calculeu i simplifiqueu les funcions derivades $f'(x)$ i $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots+(4n-1)}{a\cdot n^2+3} = 1$, perquè si no fos així, en ser $A^{\pm\infty} = 0$ o ∞, per a $A \neq 1$, el resultat del límit de l'enunciat no podria ser $\sqrt[3]{e}$. Llavors,

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots+(4n-1)}{a\cdot n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3+(4n-1)}{2}\cdot n}{a\cdot n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{an^2+3} = \frac{2}{a} \Longrightarrow \boxed{a=2}.$$

També s'ha de complir $b \neq 0$, perquè en cas contrari el límit de l'enunciat seria $1^0 = 1 \neq \sqrt[3]{e}$. Llavors, tenim una indeterminació del tipus 1^∞ i, per tant,

$$e^{\frac{1}{3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b\cdot n\cdot\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{bn^2-3bn}{2n^2+3}} = e^{\frac{b}{2}} \Longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{b}{2} \Longrightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}.$$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{-\cancel{x}}{2(1+x)\cancel{x}\sqrt{x}}=\boxed{\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}}.$

$f(x)=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Longrightarrow x=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}\Longrightarrow \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\tan^2 x}.$

Llavors, $\left(f^{-1}\right)'(x)=(-2)(\tan x)^{-3}\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{-2\cos^3 x}{\sin^3 x\cos^2 x}=\boxed{\dfrac{-2\cos x}{\sin^3 x}}.$

3. Resoleu un dels dos problemes següents:

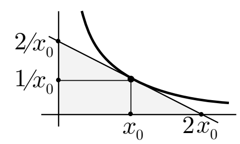
a) Sigui el gràfic de la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Demostreu que l'àrea del triangle que forma la recta tangent en el punt d'abscissa x_0 és independent del punt x_0.

b) Un rectangle de perímetre $2p$ gira al voltant d'un dels seus costats i genera un cilindre. Calculeu els seus costats si el cilindre ha de ser de volum màxim.

a) Tangent en x_0: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Longleftrightarrow y-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)\Longleftrightarrow y=-\dfrac{1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0}.$

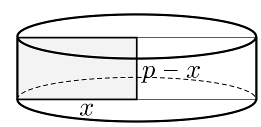
Tall OX: $y=0\Longrightarrow 0=-\dfrac{1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0}\Longrightarrow x=\dfrac{2/x_0}{1/x_0^2}=2x_0.$

Tall OY: $x=0\Longrightarrow y=0+\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{2}{x_0}.$



Llavors l'àrea del triangle és independent de x_0 perquè, $\boxed{\text{àrea}=\dfrac{1}{2}\,|2x_0|\left|\dfrac{2}{x_0}\right|=\dfrac{4\cancel{|x_0|}}{2\cancel{|x_0|}}=2}.$

b) Volem optimitzar el volum $V(x)=\pi x^2(p-x)=\pi(-x^3+px^2)$, en l'interval obert $]\,0,p\,[$. La seva derivada és $V'(x)=\pi(-3x^2+2px)$, la qual s'anul·la en $x=0$ o $x=\frac{2p}{3}$.
Si estudiem la monotonia en l'interval $]\,0,p\,[$ observem que l'extrem relatiu del punt $x=\frac{2p}{3}$ és un màxim absolut. Consegüentment quan els costats del rectangle són de longituds $\boxed{x=\frac{2p}{3}}$ i $\boxed{y=\frac{p}{3}}$ obtenim el volum màxim $\boxed{V\left(\frac{2p}{3}\right)=\frac{4\pi p^3}{27}}$



	0		$2p/3$		p
V'		$\oplus$		$\ominus$	
V		↗		↘	

4. Sigui $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$. Estudieu el signe de $f'(x)$ i les asímptotes de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-2)^2-2(x-2)x^2}{(x-2)^4}= \\ &= \frac{\left(2x(x-2)-2x^2\right)(x-2)}{(x-2)^4}= \\ &= \frac{2x^2-4x-2x^2}{(x-2)^3}=\boxed{\frac{-4x}{(x-2)^3}}. \end{aligned}$$

		0		2	
f'	$+/-$ $\ominus$		$-/-$ $\oplus$		$-/+$ $\ominus$
f	↘		↗		↘

- Monòtona decreixent en $]-\infty,0\,[\cup]\,2,+\infty\,[$.
- Monòtona creixent en $]\,0,2\,[$

Asímptota Horitzontal: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}=1\Longrightarrow\boxed{y=1}.$

Asímptota Vertical: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-2)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty\Longrightarrow\boxed{x=2}.$

Asímptota Oblíqua: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{(x-2)^2}}{x}=0\Longrightarrow\boxed{\text{No existeix}}.$