IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT A — 30/I/2003
Càlcul-Final — (1.5+0.5+0.5+1.5)+1.5+2+(1+2+1+1+1+1.5)

---

1. Considereu les funcions $f(x) = -7x^3 + 31x$ i $g(x) = \dfrac{24}{x^2}$.

a) Determineu els punts d'intersecció dels seus gràfics. Dos d'ells tenen abscisses enteres; l'altre l'haureu d'aproximar pel teorema de Bolzano del qual heu de donar l'enunciat.

b) Calculeu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to0^+} g(x), \quad \lim_{x\to0^-} g(x), \quad \lim_{x\to+\infty} g(x), \quad \lim_{x\to-\infty} g(x).$$

c) Representeu $f(x)$ i $g(x)$ gràficament sobre uns mateixos eixos de coordenades, a partir de la informació anterior i dels talls amb els eixos.

d) Calculeu l'àrea del recinte limitat pels dos gràfics quan $x \geq 0$, $y \geq 0$.

---

a) $f(x) = g(x) \iff -7x^3 + 31x = \dfrac{24}{x^2} \iff -7x^5 + 31x^3 - 24 = 0$. Apliquem Ruffini

$$\left.\begin{array}{r|rrrrrr} & -7 & 0 & 31 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & & -7 & -7 & 24 & 24 & 24 \\ \hline & -7 & -7 & 24 & 24 & 24 & 0 \\ 2 & & -14 & -42 & -36 & -24 & \\ \hline & -7 & -21 & -18 & -12 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 1,\ x = 2 \text{ són arrels.}$$

Per trobar l'altra arrel apliquem el teorema de Bolzano que diu:

> Si una funció f és contínua en $[\,a, b\,]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, llavors existeix $\alpha \in]\,a, b\,[$ tal que $f(\alpha) = 0$.

En el nostre cas tenim la funció polinòmica $p(x) = -7x^5 + 31x^3 - 24$ que compleix $p(-3) = 840 > 0$ i $p(-2) = -48 < 0$. Per tant, existeix una arrel en l'interval $]-3, -2\,[$.

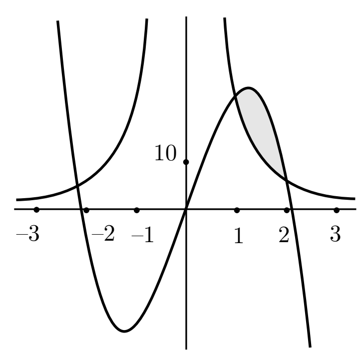
b) Càlcul dels límits:

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x(7x^2 - 31) = (-\infty)\cdot(+\infty) = \boxed{-\infty}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(7x^2 - 31) = (+\infty)\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{24}{x^2} = \frac{24}{+\infty} = \boxed{0}$. $\qquad \displaystyle\lim_{x\to0^\pm} g(x) = \lim_{x\to0^\pm} \frac{24}{x^2} = \frac{24}{0^+} = \boxed{+\infty}$.

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow -7x^3 + 31x = 0 \Longrightarrow x(-7x^2 + 31) = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $x = \pm\sqrt{31/7} \approx \pm 2.1$. Per tant tenim tres punts de tall amb l'eix d'abscisses, un d'ells el $(0, 0)$.
$g(x) = \frac{24}{x^2} \neq 0, \forall x$; $g(0) = 24/0$ no existeix. Per tant el gràfic de g no talla els eixos.
Si recollim la informació dels límits de l'apartat anterior obtenim les asímptotes de $g(x)$ i el comportament a l'infinit de $f(x)$.



d) Àrea $= \displaystyle\int_1^2 \left(-7x^3+31x-\frac{24}{x^2}\right)dx = \left[-\frac{7x^4}{4}+\frac{31x^2}{2}+\frac{24}{x}\right]_1^2 = 46-\frac{151}{4} = \boxed{\frac{33}{4}}$.

2. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x^3-ax+b}{x^2-1}$.
Sabem que el seu gràfic talla l'eix d'abscisses quan $x=2$, i que en aquest mateix punt la recta tangent és paral·lela a la recta d'equació $20x-9y=0$. Determineu els valors de a i de b.

Sabem que $f(2)=0$. A més, en ser el pendent de la recta tangent en $x=2$ igual al pendent $20/9$ de la recta paral·lela, es compleix $f'(2)=\frac{20}{9}$. Llavors,

$$f(x)=\frac{x^3-ax+b}{x^2-1} \implies f'(x)=\frac{(3x^2-a)(x^2-1)-2x(x^3-ax+b)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4+(a-3)x^2-2bx+a}{(x^2-1)^2}.$$

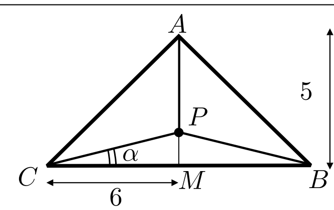
$$f(2)=0 \implies \frac{8-2a+b}{3}=0 \implies \boxed{2a-b=8}. \qquad (1)$$

$$f'(2)=\frac{20}{9} \implies \frac{20}{9}=\frac{16+4(a-3)-4b+a}{9} \implies \boxed{5a-4b=16}. \qquad (2)$$

Resolem el sistema de les equacions (1) i (2) i obtenim

$$\left.\begin{array}{r} -8a+4b=-32 \\ 5a-4b=16 \\ \hline -3a\quad=-16 \end{array}\right\} \implies \boxed{a=\frac{16}{3}, \qquad b=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}}.$$

3. Sigui un triangle ABC isòsceles tal que el seu costat desigual BC mesura 12 i la seva alçada AM sobre el costat desigual mesura 5. Considereu un punt variable P sobre aquesta alçada.



Per a quin valor de l'angle $\alpha=\widehat{BCP}$ la suma $d(\alpha)=PA+PB+PC$ és mínima, i per a quin valor de α la suma $d(\alpha)=PA+PB+PC$ és màxima? Doneu els valors d'aquestes sumes.

$$\left.\begin{array}{l} PM=5-6\tan\alpha \\ PB+PC=2\,PC=2\cdot\dfrac{6}{\cos\alpha} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} d(\alpha)=\dfrac{12}{\cos\alpha}+5-6\tan\alpha\,,\;\; \alpha\in[\,0,\arctan(5/6)\,] \\ d'(\alpha)=\dfrac{12\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{6}{\cos^2\alpha}=6\cdot\dfrac{2\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha} \end{array}$$

$$d'(\alpha)=0 \implies 2\sin\alpha-1=0 \implies \sin\alpha=\frac{1}{2} \implies \alpha=\frac{\pi}{6}=30^\circ.$$

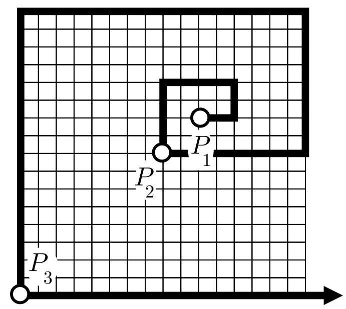
Punts candidats a ser extrems: $\alpha=0$, $\alpha=\arctan(5/6)$, $\alpha=\pi/6=30^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} d(0)=12+5-0=17 \\ d(\pi/6)=8\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}\approx 15.39 \\ d(\arctan(5/6))=2\sqrt{25+36}=2\sqrt{61}\approx 15.62 \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{l} \text{Mínim: } \alpha=30^\circ,\ d(30^\circ)\approx 15.39 \\ \text{Màxim: } \alpha=0^\circ,\ d(0^\circ)=17. \end{array}}$$

4. Cerqueu :

a) Les funcions derivades de: $f(x) = \arctan\left(\dfrac{5x}{x+1}\right)$.

b) Les integrals: $\displaystyle\int \frac{5}{4x^2+9}\,dx$, $\displaystyle\int_2^{7/2} \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$ [Canvi: $x = 2 + 3\sin t$].



c) La primitiva de la funció $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$, tal que el seu gràfic passa pel punt $(1, 2)$.

d) Els punts i tipus de discontinuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

e) La longitud de l'espiral rectangular adjunta, des de P_1 fins a P_{15}.

f) L'àrea del recinte determinat pels eixos de coordenades i el gràfic de $f(x) = \cos(2x)$, quan $0 \le x \le \dfrac{5\pi}{4}$.

a) $$f'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{25x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{5(x+1)-5x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+25x^2} \cdot \frac{5}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{5}{26x^2+2x+1}}.$$

b) $$\int \frac{5}{4x^2+9}\,dx = \frac{5}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{5\cdot 3}{9\cdot 2}\int \frac{2/3}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\,dx = \boxed{\frac{5}{6}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)+K}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2+3\sin t \\ x'(t) = 3\cos t \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \Longrightarrow \sin t = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ x = 7/2 \Longrightarrow \sin t = 1/2 \Longrightarrow t = \pi/6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_2^{7/2}\sqrt{5+4x-x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/6}\sqrt{5+8+12\sin t-4-12\sin t-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt = \int_0^{\pi/6} 3\cos t\sqrt{9-9\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/6} 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\pi/6}\cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 9\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 9\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{8} \approx 4.305}.$$

c) $$\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int^{-x} dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + K = -e^{-x}(x+1) + K = P(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \quad \Longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-x} \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\|$$

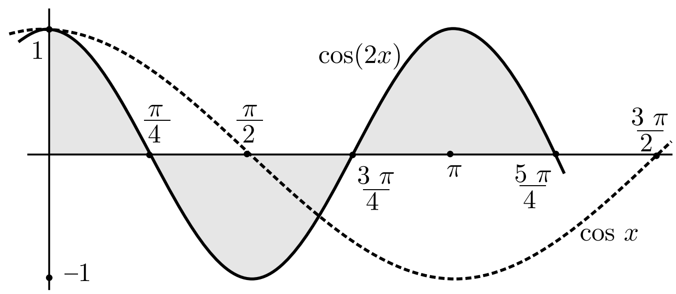
$$2 = P(1) = -e^{-1}(1+1) + K \Longrightarrow K = 2 + \frac{2}{e} \Longrightarrow \boxed{P(x) = -\frac{x+1}{e^x} + 2 + \frac{2}{e}}.$$

d) El punt de discontinuïtat es troba en $x = 1$, perquè la funció està definida en l'entorn però no en $f(1) = \dfrac{\ln 1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$. El tipus d'aquesta de discontinuïtat l'esbrinem utilitzant la regla de l'Hôpital en el càlcul del límit següent:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1/1}{1} = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{discontinuïtat evitable en } x=1}.$$

e) $\underbrace{2^2+2^3}_{P_1P_2} + \underbrace{2^4+2^5}_{P_2P_3} + \underbrace{2^6+2^7}_{P_3P_4} \cdots + \underbrace{2^{28}+2^{29}}_{P_{14}P_{15}} = \dfrac{4(2^{28}-1)}{2-1} = \boxed{4(2^{28}-1) = 1073741820}.$

f) Àrea$= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2x)\,dx + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos(2x)\,dx = \cdots$



O bé per les simetries de la funció cosinus:

$$\text{Àrea} = 5\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx = 5\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{2}}.$$