1. Discutiu i resoleu el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & ay & + & z=4 \\ x & + & 3y & + & z=5 \\ ax & + & y & + & z=4 \end{array}\right.$

Discussió i resolució pel mètode de Gauss:

Treballem amb la matriu A del sistema i la matriu $A|B$ ampliada. Si apliquem el mètode de Gauss pivotant sobre els coeficients emmarcats obtenim els sistemes equivalents següents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3-aF_1\longrightarrow F_3}{\overset{F_2-F_1\longrightarrow F_2}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{3-a} & 0 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 4-4a \end{array}\right) \underset{(a\neq 3)}{\overset{(3-a)F_3-(1-a^2)F_2\longrightarrow F_3}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 4 \\ 0 & 3-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4a+3 & 5a^2-16a+11 \end{array}\right).$$

Llavors, si observem que $a^2-4a+3=0 \Longleftrightarrow a=1$ o $a=3$, obtenim els casos d'estudi següents:

- $\boxed{a\neq 1 \quad \text{i} \quad a\neq 3}$
  Les matrius A i $A|B$ són esglaonades de 3 files perquè $a^2-4a+3\neq 0$ i $a-3\neq 0$.
  Per tant, $r(A)=r(A|B)=3=$nombre d'incògnites.
  Consegüentment el sistema és **compatible determinat**.
- $\boxed{a=3}$
  El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, i $r(A)=2\neq 3=r(A|B)$.
  Consegüentment el sistema és **incompatible**.
- $\boxed{a=1}$

El sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$, i $r(A)=2=r(A|B)$.

Consegüentment el sistema és **compatible indeterminat**.

- Solució quan $a=1$:

Tenim el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$, en què considerem $z=\lambda\in\mathbb{R}$. Llavors,

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\[2ex] x=4-\lambda-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}-\lambda \end{array}\right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{x=\frac{7}{2}-\lambda,\ y=\frac{1}{2},\ z=\lambda}.$$

- Solució quan $a \neq 1 \quad \text{i} \quad a \neq 3$:

En ser, $a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3)$ i $5a^2 - 16a + 11 = (a-1)(5a-11)$, tenim

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{(a-1)(5a-11)}{(a-1)(a-3)} = \frac{5a-11}{a-3} \\ y &= \frac{1}{3-a} \\ x &= 4 - \frac{5a-11}{a-3} - \frac{a}{3-a} = \frac{1}{3-a} \end{aligned}\right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{x = \frac{1}{3-a},\ y = \frac{1}{3-a},\ z = \frac{5a-11}{a-3}}.$$

Discussió i resolució mitjançant l'aplicació de la teoria de determinants:

$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \iff r(A) \geq 2$. El valor del menor que resulta d'orlar M ens permetrà determinar $r(A)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3.$$

Conseqüentment, es presenten els casos:

- $a^2 - 4a + 3 = 0 \iff a = 3 \text{ o } a = 1 \iff r(A) = 2$.
- $a^2 - 4a + 3 \neq 0 \iff a \neq 3 \text{ i } a \neq 1 \iff r(A) = 3 = r(A|B)$.

Comparem els rangs en els diferents casos:

- $a = 3$: Per trobar $r(A|B)$, calculem l'orla

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 12 - 4 - 12 - 15 = -2 \neq 0 \iff r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A).$$

- $a = 1$: L'orla del menor indicat que queda per calcular és

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (hem observat la igualtat de la 1a i 3a fila.)} \iff r(A|B) = r(A) = 2.$$

De tot això en resulta la mateixa discussió que pel mètode de Gauss feta abans. Per a la resolució, si utilitzem la regla de Cramer, (en el cas indeterminat un cop establert $z = \lambda$), obtenim:

- $a = 1$:

$$\left.\begin{array}{rcrl} & & z &= \lambda \\ x &+& 3y &= 5 - \lambda \\ x &+& y &= 4 - \lambda \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\begin{matrix} 5-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & 1 \end{matrix}}{-2} = \frac{7-2\lambda}{2}, \\ y &= \frac{\begin{matrix} 1 & 5-\lambda \\ 1 & 4-\lambda \end{matrix}}{-2} = \frac{1}{2}, \\ z &= \lambda. \end{aligned}\right.$$

- $a \neq 1$ i $a \neq 3$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & a & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a-3)} = \frac{1-a}{(a-1)(a-3)} = \frac{1}{3-a},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ a & 4 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a-3)} = \frac{1-a}{(a-1)(a-3)} = \frac{1}{3-a},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ a & 1 & 4 \end{vmatrix}}{(a-1)(a-3)} = \frac{5a^2-16a+11}{(a-1)(a-3)} = \frac{(5a-11)(a-1)}{(a-1)(a-3)} = \frac{5a-11}{a-3}.$$

2. Enunicieu el teorema de Rouché i utilitzeu-lo per discutir el sistema següent

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{array} \right. \qquad \text{en què} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sigui un sistema d'equacions lineals amb n incògnites. Si $r(A)$ és el rang de la matriu del sistema i $r(A|B)$ el rang de la matriu ampliada, es compleix

$$r(A) = r(A|B) \iff \text{el sistema és compatible.}$$

Aquest teorema es pot aplicar, si anomenem $r = r(A) = r(A|B)$, a la discussió de sistemes tenint en compte que

$r < n \iff$ sistema compatible indeterminat.
$r = n \iff$ sistema compatible determinat.

En el nostre problema $det(A|B) \neq 0 \iff r(A|B) = 3$. A més, en tenir la matriu A del sistema dues columnes, resulta $r(A) \leq 2$. Per tant $r(A) \neq r(A|B)$ i el sistema és **incompatible**.

3. Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$, calculeu $\begin{vmatrix} c_1+c_2 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -c_3 & -a_3 & -b_3 \\ 5c_1 & 5a_1 & 5b_1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} c_1+c_2 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -c_3 & -a_3 & -b_3 \\ 5c_1 & 5a_1 & 5b_1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & b_2 \\ -c_3 & -a_3 & -b_3 \\ 5c_1 & 5a_1 & 5b_1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-5) \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ c_1 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} (-5)(-1)^4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-1)^4\cdot 2 = \boxed{-10}.$$

(1): $F_1 - \frac{1}{5}F_3 \longrightarrow F_1$.
(2): Si existeix un factor comú en una fila es pot treure com a factor fora del determinant.
(3): Hem fet dos intercanvis de files i dos de columnes. En total cal fer 4 canvis de signe, és a dir que multipliquem per $(-1)^4$.

4. Siguin els vectors

$$\vec{v}_1 = (a, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, a) \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = (2, a, 1).$$

a) Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$, són linealment dependents?

b) Per a quins valors de a, es compleix $det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \neq 0$?

a) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linealment dependents $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2 = 0.$

Apliquem la regla de Ruffini per trobar aquestes arrels:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & & -1 & -2 & \\ \hline & -1 & -2 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{Per a } a = 1 \text{ o } a = -2, \text{ són linealment dependents.}}$$

b) $det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \neq 0 \Longleftrightarrow -a^3 + 3a - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow \boxed{a \neq 1 \text{ i } a \neq -2}$.

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculeu A^{-1} i A^{10}.

Utilitzem el mètode de resoldre plegats dos sistemes d'equacions, de rang 2 i determinats, per Gauss:

$$\begin{array}{rr|rr} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & 1 \end{array} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}; \begin{array}{rr|rr} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \overset{(3)}{\Longleftrightarrow}; \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

(1): $F_2 - F_1 \longrightarrow F_2$.
(2): $-2F_1 - F_2 \longrightarrow F_1$.
(3): $-\frac{1}{2}F_1 \longrightarrow F_1$ i $-\frac{1}{2}F_2 \longrightarrow F_2$.

Per tant, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^4 &= A^{2\cdot 2} = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conjectura: $\quad A^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$n = 1:$ Hem provat més amunt que és cert

$n \Longrightarrow n+1:$ $\quad A^{2(n+1)} = A^{2n}A^2 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

Per tant, $A^{10} = A^{2\cdot 5} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}}$.

6. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$. Raoneu,

a) Quina és la relació entre $det(A)$ i $det(k \cdot A)$, en què $k \in \mathbb{R} - \{0\}$?

b) Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, quin és el nombre màxim de menors d'ordre 3 que cal calcular per tal de saber si $r(A) > 2$?

c) En el càlcul de $det(A)$, quants productes de cinc coeficients s'han de calcular i quin és el signe de la permutació de subíndexs corresponent al producte $a_{31}a_{23}a_{45}a_{14}a_{52}$?

a) En multiplicar per k la matriu A, cada fila queda multiplicada per k. Llavors, en el determinant $det(k \cdot A)$, es pot treure per cada fila, un factor k. En resulta

$$\boxed{det(k \cdot A) = k^5 \cdot det(A)}.$$

b) L'estudi de l'existència d'un menor d'ordre 3 diferent de zero entre els resulten d'orlar el menor d'ordre 2 donat, determina el rang. Disposem de les columnes 3,4 i 5, i les files 3, 4 i 5 per orlar el menor d'ordre 2. Per tant, cal construir un màxim de $\boxed{3 \cdot 3 = 9 \text{ menors}}$.

c) S'han de calcular tants productes com permutacions es poden fer entre els subíndexs 1,2,3,4,5. Per fer-ne el recompte només cal construir un arbre de possibilitats en la construcció de les permutacions. Aquest presenta 5 possibilitats per a la primera xifra, 4 per a la segona, 3 per a la tercera, 2 per a la quarta, i 1 per a la cinquena. En total $\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ productes}}$.

Per calcular el signe fem el recompte del nombre d'inversions en la permutació dels subíndexs de les columnes, un cop ordenat el producte segons els subíndexs de les files:

$$a_{31}a_{23}a_{45}a_{14}a_{52} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}.$$

Inversions: 43,41,42,31,32,52. En total n'hi han 6, per tant $\boxed{\text{signe } = (-1)^6 = +1}$.