IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT — 8/II/2006
Nombres reals i funcions – Final — $5 + (2.5 + 1.5) + 3 + 2 + 3$

S'han de resoldre els exercicis 1, 2, 5, 6 i escollir un entre el 3 i el 4.

1. Considereu la funció $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$.

a) Trobeu el seu domini.

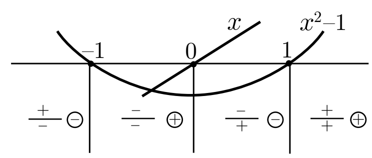
b) Calculeu $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

c) Trobeu els punts de tall amb l'eix d'abscisses.

d) Calculeu-ne la derivada.

e) Trobeu l'equació de la recta tangent paral·lela a $5x - 12y = 0$.

a) Es tracta de trobar els $x \in \mathbb{R}$ tals que $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$. Del gràfic adjunt es dedueix que el domini és $\boxed{(-1,0)\cup(1,+\infty)}$.



b) $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln\frac{0^+}{1} = \ln 0^+ = \boxed{-\infty}.$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln\frac{-1}{0^-} = \ln +\infty = \boxed{+\infty}.$$

c) $$\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x} = 1 \Longrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

d) $$f'(x) = \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{2x\cdot x - (x^2-1)}{x^2} = \frac{x(x^2+1)}{x^2(x^2-1)} = \boxed{\frac{x^2+1}{x^3-x}}.$$

e) En ser paral·leles, els pendents de les dues rectes valen $\dfrac{5}{12}$. En el punt de tangència, la derivada és igual al pendent de la recta tangent. Per tant, l'abscissa x d'aquest punt satisfà

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{5}{12} \Longleftrightarrow 5x^3 - 12x^2 - 5x - 12 = 0$$

Per Ruffini: $$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -12 & -5 & -12 \\ 3 & & 15 & 9 & 12 \\ \hline & 5 & 3 & 4 & 0. \end{array}$$ Llavors, el punt de tangència és $(3, f(3)) = \left(3, \ln\dfrac{8}{3}\right)$.

D'aquí en resulta la recta tangent:

$$y - \ln\frac{8}{3} = \frac{5}{12}(x-3) \Longleftrightarrow \boxed{5x - 12y - 15 + 12\cdot\ln\frac{8}{3} = 0}.$$

2. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{8x-16}{x^2}$.

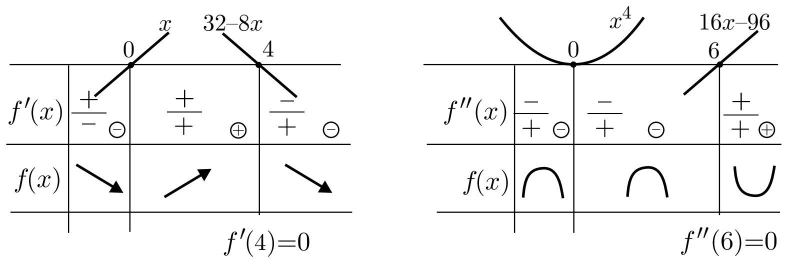
a) Trobeu-ne els extrems relatius, els punts d'inflexió i els intervals de monotonia i concavitat.

b) Calculeu les seves asímptotes mitjançant el càlcul de límits i utilitzeu la informació recollida i els talls amb els eixos per representar f gràficament.

a) $f'(x) = \dfrac{8x^2 - 2x(8x-16)}{x^4} = \dfrac{32-8x}{x^3}$

$$f''(x) = \frac{-8x^3 - 3x^2(32-8x)}{x^4} = \frac{16x-96}{x^4}$$

Dels esquemes adjunts en resultarà la resolució d'aquest apartat:



f decreix en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, f creix en $(0,4)$

f té un màxim local en $x=4$, $f(4)=1$

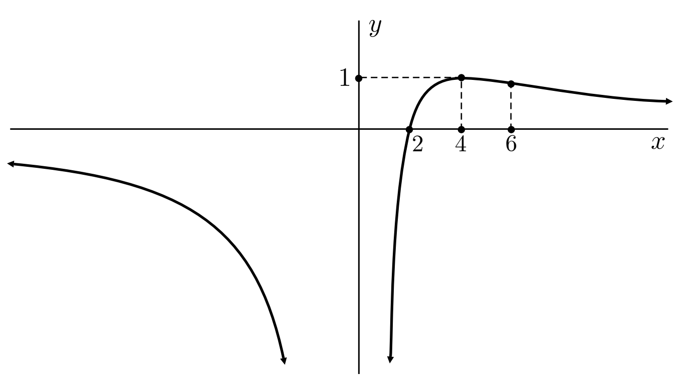
f és còncava amunt en $(6,+\infty)$, f és còncava avall en $(-\infty,0)\cup(0,6)$

f té un punt d'inflexió en $x=6$, $f(6)=\frac{8}{9}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty \Longrightarrow$ Hi ha asímptota vertical d'equació $\boxed{x=0}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}}{1} = \frac{0-0}{1} = 0 \Longrightarrow \boxed{y=0} \text{ és asímptota horitzontal.}$$

Talla l'eix OX quan $8x-16=0$, és a dir quan $x=2$.



3. El gràfic d'una funció $f(x)$ és una paràbola que passa pels punts $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ i $(0, 3)$, i té l'eix d'ordenades com a eix de simetria. Considerem tots els triangles $\triangle OPQ$ rectangles en P, tals que

- $O = (0, 0)$.
- $P = (x, 0)$, en què $0 < x < \sqrt{3}$.
- Q es mou sobre la paràbola.

a) Justifiqueu que l'àrea $A(x)$ del triangle $\triangle OPQ$, en què x és l'abscissa de P, ve descrita per la funció

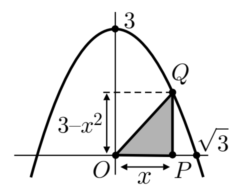
$$A(x) = \frac{3x - x^3}{2}, \quad 0 < x < \sqrt{3}.$$

b) Estudieu el signe de la derivada $A'(x)$ per tal de trobar el valor màxim de totes les àrees.

a) En estar el vèrtex de la paràbola sobre l'eix d'ordenades, aquesta és del tipus $f(x) = ax^2 + c$. Llavors,

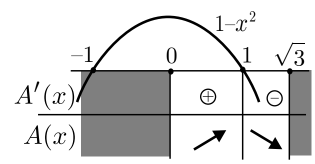
$$3 = f(0) = a \cdot 0^2 + c \Longrightarrow c = 3, \quad 0 = f\left(\sqrt{3}\right) = a \cdot 3 + 3 \Longrightarrow a = -1.$$

Per tant, la funció que descriu la paràbola és $f(x) = 3 - x^2$. Del gràfic adjunt i de la fórmula de l'àrea d'un triangle en resulta



$$A(x) = \frac{x(3 - x^2)}{2} = \frac{3x - x^3}{2}, \quad \text{en què } 0 < x < \sqrt{3}.$$

b) $A'(x) = \frac{1}{2}\,(3 - 3x^2) = \frac{3}{2}\,(1 - x^2)$. De l'esquema adjunt deduïm que hi ha un màxim absolut en $x = 1$ i el valor de l'àrea màxima és $A(1) = \frac{1}{2}(3 - 1) = \boxed{1}$.

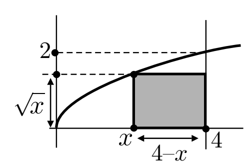


4. Considereu els rectangles inscrits entre les rectes $y = 0$ i $x = 4$ i la corba $y = \sqrt{x}$ (dos costats han d'estar sobre les rectes $y = 0$, $x = 4$.)

a) Justifiqueu que l'àrea $A(x)$ ve descrita per: $A(x) = (4 - x)\sqrt{x}, \quad 0 < x < 4.$

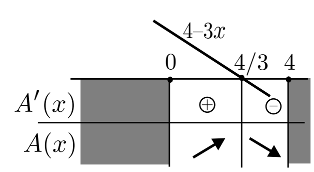
b) Estudieu el signe de la derivada $A'(x)$ per tal de trobar el valor màxim de totes les àrees.

a) La base del rectangle val $4 - x$ i l'altura ve determinada per la imatge del punt x, $f(x) = \sqrt{x}$ en què $0 < x < 4$. Per tant,



$$A(x) = (4 - x)\sqrt{x}.$$

b) $A'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(4 - x) = \dfrac{-2x + 4 - x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4 - 3x}{2\sqrt{x}}$.
De l'esquema adjunt es dedueix que hi ha un màxim absolut en $x = \dfrac{4}{3}$ i el valor màxim de l'àrea és



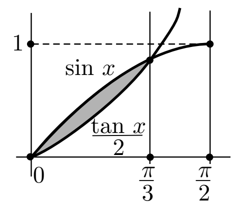
$$A\left(\frac{4}{3}\right) = \left(4 - \frac{4}{3}\right)\sqrt{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3.079}.$$

5. Calculeu l'àrea del recinte tancat determinat per les funcions

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{\tan x}{2},$$

entre els dos punts en què es tallen a l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Cerquem l'interval que determina el recinte tancat en $[0, \pi/2]$.



$$\sin x = \frac{\tan x}{2} \iff 2\sin x\cos x = \sin x \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\iff \sin x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x = \frac{1}{2} \iff x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Àrea} = \int_0^{\pi/3} \left(\sin x - \frac{\tan x}{2}\right) dx = \left[-\cos x + \frac{\ln|\cos x|}{2}\right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\frac{1}{2}}{2} + 1 - \frac{\ln 1}{2} = \boxed{\frac{1 - \ln 2}{2}}.$$

6. Calculeu les integrals indefinides:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$, (utilitzeu el mètode d'integració per parts)

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, feu el canvi $\sqrt{2x+1} = t$

a)
$$\left.\begin{array}{lcl} u = \ln x & \longrightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} & \longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int \frac{\ln x}{x^3}\, dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + K$$

$$= \boxed{-\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + K}.$$

b) $$\sqrt{2x+1} = t \Longrightarrow 2x + 1 = t^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^2 - 1}{2} \\ 2\,dx = 2t\,dt \Longrightarrow dx = t\,dt \end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \int \frac{t\,dt}{\frac{t^2-1}{2}\cdot t} = \int \frac{2}{t^2-1} \stackrel{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| + \ln|t+1| + K$$

$$\stackrel{(2)}{=} \boxed{\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} + 1}\right) + K} \stackrel{(3)}{=} \ln\left(\frac{2x + 2 - 2\sqrt{2x+1}}{2x}\right) + K$$

$$= \boxed{\ln\left(\frac{x + 1 - \sqrt{2x+1}}{x}\right) + K = \ln\frac{\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)^2}{2x} + K}.$$

(1) $$\frac{2}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A - B}{t^2 - 1} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}\right.$$

(2) Desfem el canvi.

(3) Racionalitzem.