**1.** Sigui el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2ax & - & 2y & + & az & = & 12 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 5 \\ ax & - & y & - & 11z & = & a+1 \end{array}\right.$$

a) Discutiu-lo, a partir de la comparació dels rangs de la matriu del sistema i de la matriu ampliada, per als diferents valors d'$a \in \mathbb{R}$.

b) Cerqueu les solucions simplificades dels casos compatibles.

a) Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a \\ 2 & -1 & -3 \\ a & -1 & -11 \end{pmatrix}$ i $A|B = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a & 12 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ a & -1 & -11 & a+1 \end{pmatrix}$.

Farem una primera discussió a partir del càlcul de $\det A$. Aquest ens permetrà decidir sobre el valor de $\operatorname{rang} A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2a & -2 & a \\ 2 & -1 & -3 \\ a & -1 & -11 \end{vmatrix} = 22a + 6a - 2a + a^2 - 6a - 44 = a^2 + 20a - 44$$

$$\det A = 0 \Longleftrightarrow a^2 + 20a - 44 = 0 \Longleftrightarrow a = -10 \pm \sqrt{100+44} = 10 \pm 12 = \begin{cases} 2 \\ -22. \end{cases}$$

– **Cas 1:** $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}(A|B) \Longleftrightarrow a \neq 2 \quad \text{i} \quad a \neq -22.$

– **Cas 2:** $\det A = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) < 3 \Longleftrightarrow a = 2 \quad \text{o} \quad a = -22$. Aquestes dues últimes possibilitats s'han d'estudiar per separat:

- Si $\boxed{a = 2}$, estudiem el rang a partir dels menors del sistema $\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -11 & 3 \end{array}\right)$.

$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, $\det A = 0$ i $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 12 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -11 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 + 132 - 36 - 110 + 6 = 0 \Longrightarrow$

$$\mathrm{r}(A) = 2 \quad \text{i} \quad \mathrm{r}(A|B) = 2.$$

- Si $\boxed{a = -22}$, estudiem el rang del sistema $\left(\begin{array}{rrr|r} -44 & -2 & -22 & 12 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ -22 & -1 & -11 & -21 \end{array}\right)$.

$\begin{vmatrix} -2 & -22 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} -2 & -22 & 12 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -11 & -21 \end{vmatrix} = -126 + 110 + 132 - 36 - 110 + 462 = 432 \neq 0 \Longrightarrow$

$$\mathrm{r}(A) = 2 \quad \text{i} \quad \mathrm{r}(A|B) = 3.$$

**Conclusió:** De tot això la discussió es resol en tres casos,

- $\boxed{a \neq 2 \quad \text{i} \quad a \neq -22} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B) = 3 \Longleftrightarrow \boxed{\text{Compatible determinat}}$.
- $\boxed{a = 2} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B) = 2 \Longleftrightarrow \boxed{\text{Compatible indeterminat}}$.
- $\boxed{a = -22} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}(A|B) \Longleftrightarrow \boxed{\text{Incompatible}}$.

**Justificació del procediment:** Els teoremes utilitzats són

– El rang d'una matriu coincideix amb l'ordre del major menor no nul.
– El rang és $k$ si existeix un menor diferent de zero, d'ordre $k$, i tots els menors que resulten d'orlar-lo són iguals a zero.
– Els rangs de la matriu del sistema i de la matriu ampliada són iguals si i només si el sistema és compatible. A més, si és compatible i el rang és igual al nombre d'incògnites és determinat i si el rang és menor que el nombre d'incògnites és indeterminat.

b) Resolució del cas compatible determinat mitjançant la Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & a \\ 5 & -1 & -3 \\ a+1 & -1 & -11 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+22)} = \frac{a^2+2a-8}{(a-2)(a+22)} = \frac{(a+4)(a-2)}{(a-2)(a+22)} = \boxed{\frac{a+4}{a+22}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 12 & a \\ 2 & 5 & -3 \\ a & a+1 & -11 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+22)} = \frac{3a^2-138a+264}{3(a-2)(a+22)} = \frac{3(a-2)(a-44)}{(a-2)(a+22)} = \boxed{\frac{3(a-44)}{a+22}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2a & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 5 \\ a & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+22)} = \frac{-2a^2+14a-20}{(a-2)(a+22)} = \frac{-2(a-5)(a-2)}{(a-2)(a+22)} = \boxed{\frac{-2(a-5)}{a+22}}.$$

Resolució del cas compatible indeterminat. En ser un sistema de rang 2 només cal considerar les dues primeres files perquè són linealment independents. Llavors,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -16 & -4 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ z = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{12 - \frac{2}{4} - 4\lambda}{-2} = -\dfrac{23}{4} + 2\lambda\,. \end{array}}$$

La incògnita $z$ no es pot triar com a paràmetre o variable lliure, perquè les dues primeres columnes són dependents.

**2.** Donada la matriu

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & 3 & 3 \\ a & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu $\det M$.

b) Calculeu el seu rang segons els diferents valors d'$a$ i, en el cas que $\operatorname{rang} M < 4$, trobeu una relació de dependència entre les seves files.

a) Substituirem $\left\{ \begin{array}{l} F_2 - F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_4 - F_1 \longrightarrow F_4 \end{array} \right.$ i desenvoluparem per la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & 3 & 3 \\ a & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = \boxed{-8a}.$$

b) Es presenten dos casos,

– **Cas 1:** $\boxed{a \neq 0} \Longleftrightarrow -8a \neq 0 \Longleftrightarrow \boxed{\mathrm{r}(M) = 4}$.

– **Cas 2:** $\boxed{a = 0} \Longleftrightarrow -8a = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(M) \leq 3$.

En aquest cas apliquem el mètode del càlcul de menors i orles per esbrinar el rang,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{r}(M) \geq 2. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{r}(M) \geq 3.$$

Per tant, quan $\boxed{a = 0}$ es compleix que $\boxed{\mathrm{r}(M) = 3}$.

La relació de dependència és immediata, s'observa directament,

$$(0,3,3,3) = 3 \cdot (0,1,1,1) \Longleftrightarrow \boxed{F_4 = 3F_1}.$$

**3.** Trobeu totes les matrius del tipus $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, tals que $A = A^{-1}$.

Observem que $\quad A = A^{-1} \Longleftrightarrow A \cdot A = \mathrm{Id}_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Si operem, obtenim les condicions $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 0. \end{array} \right.$

Les possibilitats que en resulten són:

- $x = 0 \Longrightarrow y^2 = 1 \Longrightarrow y = 1 \quad \text{o} \quad y = -1.$
- $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1.$

Per tant, les matrius que satisfan l'enunciat són

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$