1. Considereu la successió $a_n = \dfrac{5n-3}{3n}$.
Trobeu-ne els termes que es troben en un entorn del punt 1.666 i radi 10^{-4}. Raoneu, a partir del resultat obtingut, la possibilitat que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.666$.

Els termes a_n que es demanen han de satisfer $|a_n - 1.666| < 10^{-4}$. És a dir,

$$\left|\frac{5n-3}{3n} - 1.666\right| < \frac{1}{10000} \iff \left|\frac{0.002n-3}{3n}\right| < \frac{1}{10000} \iff |0.002n-3| < \frac{3n}{10000}$$

$$\iff -3n < 20n - 30000 < 3n \iff \begin{cases} 23n > 30000 \\ \text{i} \\ 17n < 30000 \end{cases}$$

$$\iff \frac{30000}{23} < n < \frac{30000}{17} \iff 1304.35 < n < 1764.70\,.$$

Per tant, els termes que es troben dins l'entorn de l'enunciat són

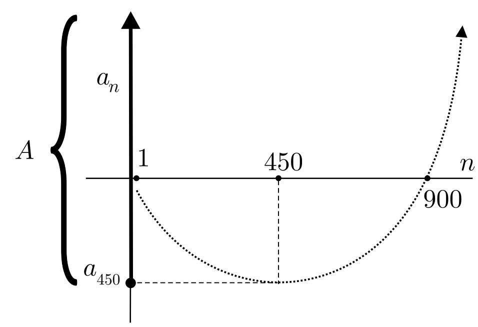
$$\boxed{\text{des del terme } a_{1305} \text{ fins el terme } a_{1764}}\,.$$

El límit no pot ser 1.666 perquè a l'entorn de l'enunciat necessàriament hi hauria de d'haver un nombre infinit de termes de la successió i només n'hi han $1764 - 1305 + 1 = 460$.

2. Trobeu les cotes superiors, les cotes inferiors, el suprem, l'ínfim, el màxim i el mínim dels conjunts:

a) $A = \{a_n \quad \text{tals que} \quad a_n = n^2 - 900n\}$.

b) $B = \operatorname{Dom} f$, en què $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$.



a) Si representem la successió gràficament, obtenim una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts 0 i 900, de vèrtex $(450, a_{450})$. Llavors, observem que el conjunt A format pels termes de la successió està contingut en l'interval $[a_{450}, +\infty)$. De tot això podem afirmar:

- No té cotes superiors ni, conseqüentment, suprem ni màxim perquè

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 900n = \lim_{n\to\infty} n(n-900) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

- Mínim: $a_{450} = 450^2 - 900 \cdot 450 = -202500$.
- Cotes inferiors: $(-\infty, -202500]$.
- Ínfim: -202500.

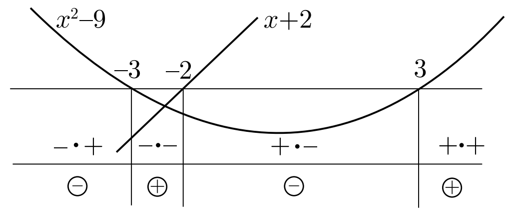
b) El domini de f està format pels x tals que el valor del polinomi sotmès al radical és positiu o zero. Per trobar-lo, estudiarem el signe del polinomi a partir dels gràfics generats per la seva descomposició factorial. Utilitzem la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

En resulta la descomposició

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x+2)(x^2-9).$$

De l'esquema gràfic obtenim



$$B = \text{Dom}\, f = [-3,-2] \cup [3,+\infty).$$

Per tant,

- No té cotes superiors ni, conseqüentment, suprem ni màxim.
- Mínim: -3
- Cotes inferiors: $(-\infty,-3]$.
- Ínfim: -3.

3. Resoleu les qüestions següents:

a) Calculeu el temps que ha de transcórrer per tal que un capital sotmès a interès continu del 3% anual es dupliqui. (Recordeu que $C(t) = C(0)\cdot e^{0.03t}$, en què $C(t)$ és el capital al cap de t anys.)

b) $\log(x^2-1) > 0$.

a) $2\,C(0) = C(0)\cdot e^{0.03t} \Longrightarrow 2 = e^{0.03t} \Longrightarrow \ln 2 = 0.03t \Longrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0.03} \approx \boxed{23.105 \text{ anys}}$.

b) $\log(x^2-1) > 0 \Longleftrightarrow 10^{\log(x^2-1)} > 10^0 \Longleftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Longleftrightarrow x^2 > 2 \Longleftrightarrow x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$, és a dir

$$\boxed{x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)}.$$

4. Calculeu:

$$a)\quad \lim_{x\to 3} \frac{3x-x^2}{\sqrt{x+1}\,-\,2} \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-x}{5x^3+1}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} \qquad c)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$$

a) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{3x-x^2}{\sqrt{x+1}\,-\,2} = \lim_{x\to 3} \frac{x(3-x)\left(\sqrt{x+1}\,+2\right)}{(x+1)-4} = \lim_{x\to 3} -x\left(\sqrt{x+1}\,+2\right) = \boxed{-12}$.

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-x}{5x^3+1}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{1}{x^3}}\right)^{\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-1}{0^+}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\infty} = \left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty} = \boxed{+\infty}$.

c) $\displaystyle \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 1} (1+x-1)^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right)^2 \stackrel{(*)}{=} \boxed{e^2}$.

(*) Perquè $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \pm\infty$.

5. Estudieu la continuïtat i feu la representació gràfica de la funció

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x+1}\,, & x<1\\[2ex] 1-\ln x\,, & x\geq 1\end{cases}$$

En ser els polinomis i el logaritme funcions contínues, els únics punts candidats a tenir una discontinuïtat són $x=-1$ perquè s'anul·la el denominador de la funció racional i $x=1$ perquè canvia la definició analítica de la funció. Els analitzem:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{x=-1}\\[1ex] f(-1)=\dfrac{(-1)^2-1}{-1+1}=\dfrac{0}{0}\Longrightarrow \nexists f(-1)\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}x=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{discontinuïtat evitable en } x=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{x=1}\\[2ex] f(1)=1-\ln 1=1-0=1\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1^2+1}{1+1}=\frac{2}{2}=1\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to1^+}f(x)=1-\ln 1=1-0=1\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{contínua en } x=1.$$

Per tant, la funció $\boxed{f \text{ és contínua en tots els reals excepte } x=-1}$.

Quant al gràfic, tenim en compte que $f(x)=x$, $\forall x\in(-\infty,1)-\{-1\}$. D'altra banda, el gràfic de $f(x)=1-\ln x$, per a $x\geq 1$, s'obté fent el simètric respecte l'eix OX de $y=\ln x$ i traslladant el resultat una unitat en la direcció positiva de l'eix OY. Observem que el tall amb l'eix OX, per a $x\geq 1$, és

$$1-\ln x=0\Longrightarrow \ln x=1\Longrightarrow x=e.$$