IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT 14/XI/2005
Nombres reals i funcions – II $1+(1.5+0.5+1)+1.5+2+(1+0.5+1)$

---

1. Considereu la funció $f(x)=\begin{cases} x+e^{\frac{x-2}{(x-1)^2}} & , x<1 \\ \lambda x+5 & , x\geq 1. \end{cases}$ Trobeu el valor $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que f és contínua en $x=1$.

Haurem d'imposar la condició de continuïtat: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 1+e^{\frac{-1}{0^+}}=1+e^{-\infty}=1+0=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lambda\cdot 1+5=\lambda+5 \\ f(1) &= \lambda+5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

f contínua en $x=1$ equival a
$1=\lambda+5$,
és a dir,
$\boxed{\lambda=-4\,.}$

2. Sigui la funció $f(x)=6x^3-12x^2-3$.

a) Estudieu-ne la monotonia i la concavitat.

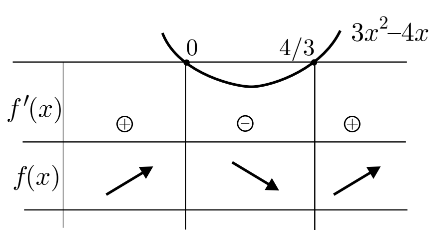
b) Calculeu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, indicant en el primer cas de quina manera resoleu la indeterminació $\infty-\infty$.

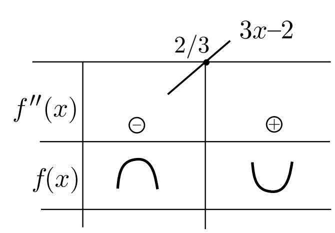
c) Enuncieu el teorema de Bolzano i trobeu els talls del gràfic de f amb l'eix OX amb el seu ajut.

a) Calculem les funcions f' i f'' i estudiem el seu signe gràficament, per tal d'establir els intervals de monotonia i concavitat.

$$f'(x)=18x^2-24x=6(3x^2-4x)=6x(3x-4), \qquad f''(x)=36x-24=12(3x-2).$$

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=0 \quad \text{o} \quad x=\frac{4}{3}, \qquad f''(x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{2}{3}\,.$$





Conclusions:

- f presenta un màxim local en $x=0$ de valor $f(0)=-3$, un mínim local en $x=\frac{4}{3}$ de valor $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{91}{9}$ i un punt d'inflexió en $x=\frac{2}{3}$ de valor $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{59}{9}$.
- f és monòtona creixent a $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3}\,,+\infty\right)$.
- f és monòtona decreixent a $\left(0\,,\frac{4}{3}\right)$.
- f és còncava avall en $\left(-\infty\,,\frac{2}{3}\right)$.
- f és còncava amunt en $\left(\frac{2}{3}\,,+\infty\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty - 3 = (\infty - \infty) = $ Indeterminat. Considerem el factor x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(6 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = +\infty(6-0-0) = +\infty\cdot 6 = \boxed{+\infty}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - (+\infty) - 3 = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}.$$

c) Enunciat del teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ contínua en } [\,a,b\,] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ existeix } \alpha\in(a,b) \text{ tal que } f(\alpha)=0.$$

Per l'estudi de la monotonia fet a l'apartat (a) sabem que $f(x)\le f(0) = -3 < 0$, $\forall x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ i, per tant, no hi ha cap tall en aquest interval. A partir de $x=\frac{4}{3}$, pel teorema de Bolzano, hi ha algun tall perquè la funció és contínua i passa de tenir valors negatius a tenir valors positius (recordem que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$). A més, no hi pot haver més d'un punt de tall perquè en ser derivable, entre els dos talls hi hauria d'haver algun punt $x>\frac{4}{3}$ amb derivada zero, (pel teorema de Rolle), i en l'estudi de la monotonia hem vist que això no passava. Aproximarem el punt de tall cercant dos valors enters consecutius de x que tinguin imatges de diferent signe. Llavors, el teorema de Bolzano garanteix l'existència d'un punt de tall entre els dos.

$$f(2) = -3 \ \text{ i } f(3) = 51 \Longrightarrow \text{ el gràfic de } f \text{ talla l'eix } OX \text{ en un punt } \alpha\in[\,2,3\,].$$

3. Calculeu: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+e^{-x}}$. b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

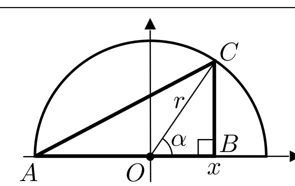
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+e^{-x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty+e^{-\infty}} = \dfrac{+\infty}{+\infty+0} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = $ Indeterminat. En ser les funcions del numerador i del denominador derivables quan x tendeix a $+\infty$, es pot aplicar la Regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = \boxed{1}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = $ Indeterminat. També podríem aplicar la regla de l'Hôpital perquè les funcions són derivables en un entorn reduït d'1. Ho resoldrem a partir de descomposicions factorials.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)\,(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\,(x+1)} = \frac{1}{2\cdot 2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

4. Considereu els triangles rectangles $\triangle ABC$ amb el vèrtex A fix en un punt d'una circumferència de radi r i centre O, el catet AB de longitud variable sobre el diàmetre que surt d'A i el catet BC de longitud variable mentre C recorre la circumferència.



Considereu la referència de la figura adjunta i les variables x (abscissa de B) i α.

a) Demostreu que l'àrea del triangle es pot expressar de les dues maneres següents:

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(r+x)\sqrt{r^2-x^2}, \qquad A(\alpha) = \frac{r^2}{2}\,\sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

b) Utilitzeu una de les dues funcions anteriors per trobar raonadament el triangle d'àrea màxima i el valor d'aquesta.

a) L'àrea del triangle és $\dfrac{1}{2}\,AB\cdot BC$. Pel teorema de Pitàgoras, $BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{r^2-x^2}$.

Llavors,

$$AB = AO + OB = r + x \quad \text{i} \quad BC = \sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow A(x) = \frac{1}{2}(r + x)\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

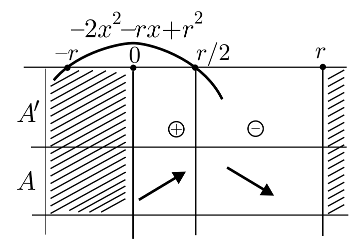
D'una altra banda, $AB = AO + OB = r + r\cos\alpha$ i $BC = r\sin\alpha$ implica

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}(r + r\cos\alpha)r\sin\alpha = \frac{r^2}{2}(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

b) Cal estudiar la funció $A(x)$ per a $x \in [0, r)$. Prescindim dels valors $x \in (-r, 0)$ perquè els triangles resulten d'àrea més petita que el que té l'angle recte de vèrtex O.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x(r + x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = -\frac{2x^2 + rx - r^2}{2\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Observem que $A'(x) = 0$ equival a



$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{-r \pm 3r}{4} = \begin{cases} \dfrac{r}{2} \\ -r. \end{cases}$$

i, segons l'estudi del signe d'$A'(x)$ a l'esquema adjunt, tenim que el màxim absolut es troba quan

$$\boxed{x = \frac{r}{2} \quad \text{i el seu valor és} \quad A\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{8}}.$$

Resoleu una de les dues qüestions següents:

5. Considereu la successió $\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{9}, \dfrac{17}{16}, 1, \ldots$. Calculeu:

a) El seu terme general i els termes que es troben en un entorn de centre 1 i radi 0.14.

b) El seu límit.

c) Les cotes superiors, les cotes inferiors, el suprem, l'ínfim, el màxim i el mínim del conjunt dels seus valors.

a) La diferència entre numeradors és constant i igual a 6, i entre denominadors també i igual a 7. Per tant, el terme general és $\boxed{a_n = \dfrac{6n - 1}{7n - 5}}$.

Els termes de l'entorn han de satisfer $\left|\dfrac{6n - 1}{7n - 5} - 1\right| < 0.14$, és a dir

$$-0.14 < \frac{-n + 4}{7n - 5} < 0.14 \iff -0.98n + 0.7 < -n + 4 < 0.98n - 0.7$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} 0.02n < 3.3 \\ \text{i} \\ 1.98n > 4.7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} n < \frac{3.3}{0.02} = 165 \\ \text{i} \\ n > \frac{4.7}{1.98} \approx 2.373. \end{array} \right.$$

Així, es troben dins l'entorn $\boxed{\text{des de l'}a_3\text{ fins l'}a_{164}}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n-1}{7n-5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \text{Indeterminat} = \lim_{n\to\infty} \frac{6-\frac{1}{n}}{7-\frac{5}{n}} = \frac{6-0}{7-0} = \boxed{\frac{6}{7}}$.

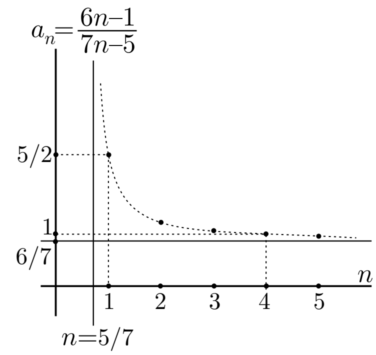
c) La funció que dóna suport al gràfic de a_n és $f(x) = \frac{6x-1}{7x-5}$, el gràfic de la qual és una hipèrbola com al que es veu en el gràfic adjunt. D'aquest gràfic i dels càlculs anteriors es conclou que:

– El conjunt de cotes superiors és $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

– El conjunt de cotes inferiors és $\left(-\infty, \frac{6}{7}\right]$.

– El suprem i el màxim dels seus valors és $\frac{5}{2}$.

– L'ínfim és $\frac{6}{7}$ i el mínim no existeix.



6. Considereu la funció $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$. Trobeu:

a) Les asímptotes horitzontals.

b) $f'(x)$.

c) $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{+\infty}{+\infty-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ = Indeterminat. Podem aplicar la regla de l'Hôpital per la derivabilitat de les funcions quan x tendeix a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \Longrightarrow \boxed{y=1 \text{ és asímptota horitzontal}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}}{e^{-\infty}-1} = \frac{0}{0-1} = 0 \Longrightarrow \boxed{y=0 \text{ és asímptota horitzontal}}.$$

b) $f'(x) = \frac{e^x\left(e^x-1\right) - e^x e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{\left(e^x-1\right)^2} = \boxed{\frac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}}$.

c) $y = \frac{e^x}{e^x-1} \overset{\text{Inversa}}{\Longrightarrow} x = \frac{e^{y^{-1}}}{e^{y^{-1}}-1} \Longrightarrow e^{y^{-1}} = \frac{x}{x-1} \Longrightarrow y^{-1} = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Llavors,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{1}{x^2-x}}.$$