1. Considereu la funció $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

a) Estudieu-ne el tipus de discontinuïtat en el punt $x = 0$, mitjançant el càlcul de límits.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$.

a) $$\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot (e^{+\infty}) = \text{Indeterminat}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(R.H.)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

En ser un dels límits laterals igual a $+\infty$, $\boxed{\text{la discontinuïtat en } x = 0 \text{ és asimptòtica}}$.

b) L'equació de la tangent és $y - f(-1) = f'(-1)\big(x - (-1)\big)$. Calculem $f(-1)$ i $f'(-1)$:

- $f(-1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$.
- $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \cdot x = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \Longrightarrow f'(-1) = \dfrac{1}{e}(1+1) = \dfrac{2}{e}$.

Recta tangent:

$$y + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}(x+1) \iff \boxed{y = \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}} \iff \boxed{2x - ey + 1 = 0}.$$

2. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{6x^2}{(x+1)^3}$.

a) Utilitzeu el càlcul de derivades per trobar

$$f'(x) = \frac{6(2x - x^2)}{(x+1)^4} \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{12(x^2 - 4x + 1)}{(x+1)^5}.$$

b) Trobeu-ne els extrems relatius, els punts d'inflexió i els intervals de monotonia i concavitat. (Estudieu els signes a partir dels gràfics de rectes i/o paràboles.)

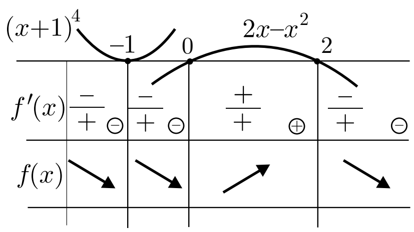
c) Calculeu les seves asímptotes mitjançant el càlcul de límits i representeu f gràficament a partir de tota la informació recollida.

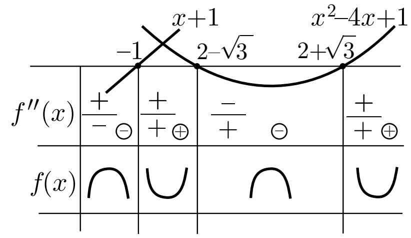
a) $$f'(x) = 6 \cdot \frac{2x(x+1)^3 - 3(x+1)^2 x^2}{(x+1)^6} = 6 \cdot \frac{2x(x+1) - 3x^2}{(x+1)^4} = \frac{6(2x - x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = 6 \cdot \frac{(2-2x)(x+1)^4 - 4(x+1)^3(2x - x^2)}{(x+1)^8} = 6 \cdot \frac{(2-2x)(x+1) - 4(2x - x^2)}{(x+1)^5}$$

$$= 6 \cdot \frac{-2x^2 + 2 - (8x - 4x^2)}{(x+1)^5} = 6 \cdot \frac{2x^2 - 8x + 2)}{(x+1)^5} = \frac{12(x^2 - 4x + 1)}{(x+1)^5}$$

b) Cerquem la monotonia, la concavitat, els extrems locals i les inflexions des de l'estudi dels signes de les derivades





f decreix en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$, f creix en $(0,2)$

f té un màxim local en $x=2$, $f(2)\approx 0.89$, f té un mínim local en $x=0$, $f(0)=0$

f és còncava amunt en $\left(-1,2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3},+\infty\right)$

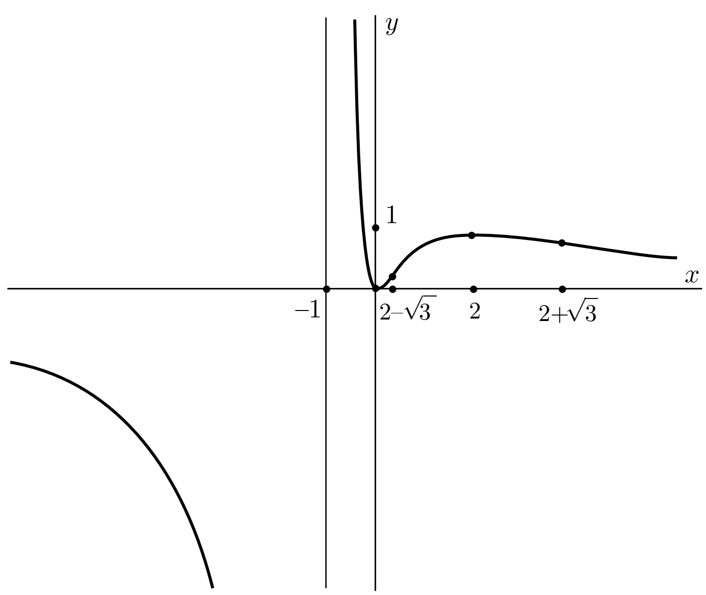
f és còncava avall en $(-\infty,-1)\cup\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

f té punts d'inflexió en ,

$x=2-\sqrt{3}\approx 0.27,\ f(2-\sqrt{3})\approx 0.21$ i $x=2+\sqrt{3}\approx 3.73,\ f(2+\sqrt{3})\approx 0.79$

c)
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{6x^2}{(x+1)^3}=\frac{6}{0^-}=-\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{6x^2}{(x+1)^2}=\frac{6}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}\Longrightarrow \text{Hi ha asímptota vertical d'equació } \boxed{x=-1}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2}{(x+1)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{6}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{0}{(1+0)^3}=0\Longrightarrow \boxed{y=0} \text{ és asímptota horitzontal}.$$



3. Partim en dos trossos un filferro de 40 cm de longitud. Construïm els perímetres d'un triangle equilàter i un quadrat, amb els dos trossos resultants. Anomenem x la longitud variable del tros de filferro amb el qual construïm el triangle.

a) Justifiqueu que la suma $S(x)$ de les àrees del triangle i del quadrat ve descrita per la funció

$$S(x) = \left(\frac{9 + 4\sqrt{3}}{144}\right) x^2 - 5x + 100,$$

i establiu-ne el domini.

b) Estudieu el signe de la derivada i interpreteu-lo a fi de calcular les mesures de cada tros de filferro per tal que $S(x)$ sigui mínima. Amb quines mesures dels dos trossos seria $S(x)$ màxima.

a) El costat del triangle equilàter mesura $\dfrac{x}{3}$ i la seva àrea és $T(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 \sin 60^\circ = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$.

El costat del quadrat mesura $\dfrac{40 - x}{4}$ i la seva àrea és $Q(x) = \left(\dfrac{40 - x}{4}\right)^2$. Per tant,

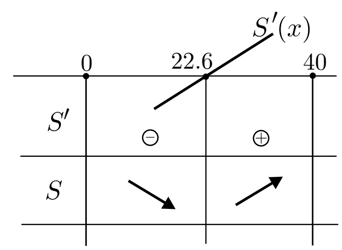
$$S(x) \;=\; \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{(40 - x)^2}{16} = \frac{4\sqrt{3}\,x^2 + 14400 - 720x + 9x^2}{144} = \left(\frac{9 + 4\sqrt{3}}{144}\right) x^2 - 5x + 100.$$

Es poden fer dos trossos no nuls, per a tots els x que compleixen $0 < x < 40$.

b) Cerquem els extrems amb l'ajut de l'estudi del signe de la derivada.

Observem que $S'(x) = \left(\dfrac{9 + 4\sqrt{3}}{72}\right) x - 5 = 0$ implica

$$x = \frac{360}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 22.6 \quad \text{i} \quad S\left(\frac{360}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 43.50$$



Llavors, de l'estudi del signe, tenim que el mínim absolut es troba quan

$$\boxed{x \approx 22.6 \;\text{ i en resulta una suma de superfícies aproximada pel valor } 43.50}.$$

Segons l'esquema, el màxim hauria d'estar en un dels extrems de l'interval de definició, però en ser obert no n'hi ha. Existeix suprem de la suma d'àrees en $x = 0$ de valor $S(0) = 100$ perquè $S(40) \approx 76.98$. Aquest suprem seria un màxim si s'acceptés treballar amb tot el filferro com un tros per muntar un quadrat de perímetre 40.