IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT — 1/II/2008
Càlcul – Final — $(0.5+1.5)+2+2+2+2$

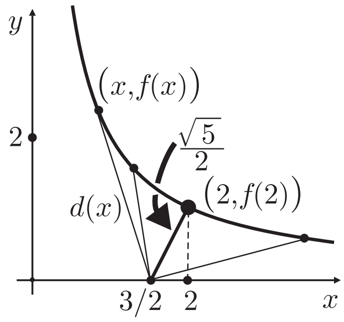
1. Considereu la hipèrbola $f(x)=\dfrac{2}{x}$ i el punt $P\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

a) Demostreu que la funció $d(x)$ que descriu la distància entre P i els punts $(x,f(x))$ del gràfic de la hipèrbola satisfà la igualtat:

$$[d(x)]^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{x^2}$$

b) Trobeu raonadament la distància mínima entre P i els punts del gràfic tals que $x>0$. Feu una representació gràfica del resultat.

a) Per la fórmula de la distància entre dos punts del pla tenim,



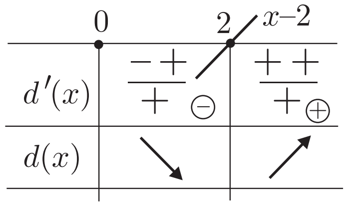
$$[d(x)]^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{x}-0\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{x^2}$$

b) Derivem per optimitzar la funció per a $x>0$.

$$2\cdot d(x)\cdot d'(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{8}{x^3}=2x-3-\frac{8}{x^3}$$

Llavors, $\qquad d'(x)=\dfrac{2x^4-3x^3-8}{2x^3\cdot d(x)}=\dfrac{(x-2)(2x^3+x^2+2x+4)}{2x^3\cdot d(x)}$.

Observem que tots els factors, per a $x>0$, són positius amb l'excepció del factor $x-2$. De l'esquema adjunt de l'estudi del signe de f' concloem que s'obté la distància mínima quan



$$x=2\quad\text{i el seu valor és}\quad d(2)=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

2. La funció que descriu la transformació d'un capital de 10000 euros sotmès a un interès continu del 6% anual és $C(t)=10000\cdot e^{0.06\cdot t}$, en què t és el temps transcorregut en anys. D'altra banda la funció que descriu la transformació d'un capital d'11000 euros sotmès a un interès compost del 6% anual amb període de capitalització anual és $A(t)=11000\cdot 1.06^t$, en què t és el temps transcorregut en anys. Calculeu, sense utilitzar el tempteig,

a) el nombre d'anys que han de passar perquè els capitals obtinguts siguin iguals.

b) el nombre d'anys que han de passar per obtenir capitals iguals, si el capital inicial per a la funció $C(t)$ fos de 12000 euros.

a) Igualem les dues funcions i resolem l'equació exponencial que en resulta,

$$C(t)=A(t)\iff\frac{A(t)}{C(t)}=1\iff\frac{11}{10}\cdot\frac{1.06^t}{e^{0.06t}}=1\iff\left(\frac{e^{0.06}}{1.06}\right)^t=1.1$$

$$\iff t\cdot\ln\left(\frac{e^{0.06}}{1.06}\right)=\ln 1.1\iff t=\frac{\ln 1.1}{0.06-\ln(1.06)}\approx\boxed{\text{55 anys 20.8 dies}}.$$

b) Repetim l'operació amb la nova dada,

$$C(t)=A(t) \iff \cdots \iff \left(\frac{e^{0.06}}{1.06}\right)^t = \frac{11}{12}$$

$$\iff t\cdot \ln\left(\frac{e^{0.06}}{1.06}\right) = \ln\frac{11}{12} \iff t = \frac{\ln 11 - \ln 12}{0.06 - \ln(1.06)} \approx -50.26 \text{ anys} \ .$$

$\boxed{\text{Mai són iguals}}$ perquè s'ha de complir $t \geq 0$. També es justifica que mai són iguals perquè

$$\frac{e^{0.06}}{1.06} \approx 1.00173 > 1 \Longrightarrow \left(\frac{e^{0.06}}{1.06}\right)^t \geq 1 > \frac{11}{12}, \text{ si } t \geq 0$$

3. Trobeu una funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tingui un màxim local en el punt $(2,0)$, talli l'eix OY en el punt $(0,-16)$ i tingui un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 4$.

Per imposar les condicions utilitzarem $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ i $f''(x) = 6ax + 2b$.

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Condició de màxim local en el punt } (2,0): \\ f(2)=0 \iff 8a+4b+2c+d=0 \\ f'(2)=0 \iff 12a+4b+c=0 \\ \bullet \text{ Condició de tall en el punt } (0,-16): \\ f(0)=-16 \iff d=-16 \\ \bullet \text{ Condició de punt d'inflexió en el punt d'ascissa } x=4: \\ f''(4)=0 \iff 24a+2b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 4a+2b+c & =8 \\ 12a+4b+c & =0 \\ 12a+b & =0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8a+2b=-8 \\ 12a+b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4a+b \ = -4 \\ 12a+b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow 8a=4 \Longrightarrow a=\frac{1}{2}\,,\ b=-6,\ c=18,\ d=-16.$$

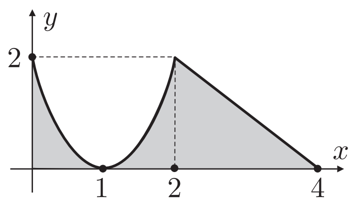
Per tant, $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\,x^3 - 6x^2 + 18x - 16}$.

Entre el 4 i el 5 trieu-ne un:

4. Considereu la funció f definida a l'interval $[0,4]$ determinada pel gràfic adjunt, consistent en un tros de paràbola i un segment.

a) Trobeu la primitiva de f que passa pel punt $(0,1)$.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat pel gràfic de f i els eixos de coordenades.



La funció quadràtica ha de tenir una arrel doble en $x=1$. Per tant, és del tipus $y = a(x-1)^2$. A més, en passar el gràfic pel punt $(0,2)$, tenim $2 = a(0-1)^2 \Longrightarrow a = 2$. Quant a la funció afí, el seu gràfic té pendent $\frac{-2}{2} = -1$ i serà del tipus $y = -x + b$. Llavors, en passar pel punt $(2,2)$, tenim $2 = -2 + b \Longrightarrow b = 4$. Conseqüentment, la funció determinada pel gràfic és,

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2(x-1)^2 & ,0 \leq x \leq 2 \\ 4-x & ,2 \leq x \leq 4\,. \end{array}\right.$$

La primitiva $P(x)$ ha de complir $P(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} P(x)$ i ser del tipus

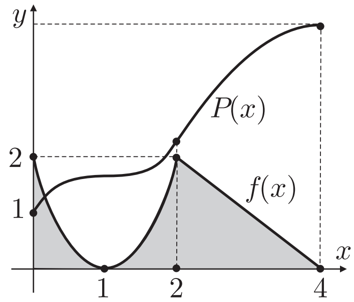
$$P(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{3}\,(x-1)^3 + K_1 & ,0 \leq x \leq 2 \\ 4x - \frac{x^2}{2} + K_2 & ,2 \leq x \leq 4\,. \end{array}\right.$$

Imposem les dues condicions

$$\begin{cases} 1 = P(0) = -\dfrac{2}{3} + K_1 \Longrightarrow K_1 = \dfrac{5}{3} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} P(x) \Longrightarrow \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} = 8 - 2 + K_2 \Longrightarrow K_2 = -\dfrac{11}{3}\,. \end{cases}$$

Finalment, la primitiva és

$$\boxed{P(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x-1)^3 + \dfrac{5}{3} & ,0 \le x \le 2 \\ 4x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{11}{3} & ,2 \le x \le 4\,. \end{cases}}\,.$$



a) $\quad$ Àrea $= \displaystyle\int_0^2 2(x-1)^2\,dx + \int_2^4 (4-x)\,dx = \left[\frac{2\,(x-1)^3}{3}\right]_0^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{-2}{3}\right) + (8-6) = \frac{4}{3} + 2 = \boxed{\frac{10}{3}}\,.$$

5. Considereu les funcions $f(x) = 10x + 11$ i $g(x) = \dfrac{4}{(1-x)^2}$

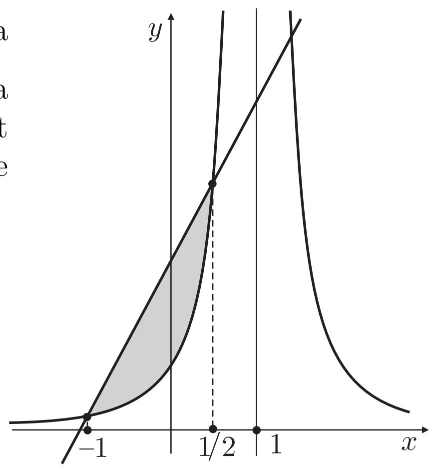
a) Representeu-les gràficament. (Per a la funció g feu l'estudi complet.)

b) Calculeu l'àrea del recinte que determinen.

a) El gràfic de g talla l'eix OY en $(0, g(0) = 4)$ i no talla l'eix OX. Les rectes $x = 1$ i $y = 0$ són asímptotes perquè $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4}{(1-x)^2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{(1-x)^2} = \dfrac{4}{+\infty} = 0$.

En ser $\quad g'(x) = \dfrac{8}{(1-x)^3}$ i $g''(x) = \dfrac{24}{(1-x)^4}$, veiem a l'esquema de més avall que la monotonia canvia en $x = 1$. La segona derivada sempre és positiva, excepte en $x = 1$ que no és del domini. Per tant f és còncava amunt en $\mathbb{R} - \{1\}$. El gràfic de f és una recta que passa pels punts $(-1.1, 0)$ i $(0, 11)$.

	0	$1-x$ 1	
$g'(x)$		$\dfrac{+}{+}$ $\oplus$	$\dfrac{+}{-}$ $\ominus$
$g(x)$		↗	↘



b) Cerquem el recinte: $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow \dfrac{4}{(1-x)^2} = 10x + 11 \Longleftrightarrow 10x^3 - 9x^2 - 12x + 7 = 0$.

En resulten les solucions $x = -1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{7}{5}$. Per tant el recinte queda restringit a l'interval $\left[-1\,,\,\frac{1}{2}\right]$. Llavors

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(10x + 11 - \frac{4}{(1-x)^2}\right) dx = \left[5x^2 + 11x - \frac{4}{1-x}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{5}{4} + \frac{11}{2} - \frac{4}{1/2}\right) - \left(5 - 11 - \frac{4}{2}\right) = \boxed{\frac{27}{4}}\,. \end{aligned}$$

Entre el 6 i el 7 trieu-ne un:

6. Calculeu: a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{25+4x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin(2x)\,dx$

a) $$\int \frac{x+1}{25+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{25+4x^2}\,dx + \int \frac{1}{25+4x^2}\,dx = \frac{\ln(25+4x^2)}{8} + \int \frac{1/25}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{\ln(25+4x^2)}{8} + \frac{1\cdot 5}{25\cdot 2}\int \frac{2/5}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2}\,dx = \boxed{\frac{\ln(25+4x^2)}{8} + \frac{\arctan\left(\frac{2x}{5}\right)}{10} + K}.$$

b) $$\int e^x \sin(2x)\,dx \overset{(*)}{=} e^x\sin(2x) - 2\int e^x\cos(2x)\,dx$$
$$\overset{(**)}{=} e^x\sin(2x) - 2\left(e^x\cos(2x) - \int -2e^x\sin(2x)\,dx\right)$$

Per tant,

$$5\int e^x\sin(2x)\,dx = e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) \Longrightarrow \int e^x\sin(2x)\,dx = \boxed{\frac{e^x\left(\sin(2x)-2\cos(2x)\right)}{5} + K}.$$

$(*)$ $u=\sin(2x) \Longrightarrow du = 2\cos(2x)\,dx$ $dv = e^x\,dx \Longrightarrow v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$	$(**)$ $u=\cos(2x) \Longrightarrow du = -2\sin(2x)\,dx$ $dv = e^x\,dx \Longrightarrow v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$

7. Sigui $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot n$, en què $n>1$.

a) Demostreu que $S_n = \dfrac{n^3-n}{3}$.

b) Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3S_n}{n^3+2}\right)^{n^2}$.

a) • Per a $n=2$ és cert, perquè $1\cdot 2 = 2 = \dfrac{2^3-2}{3}$.

• Si ho suposem cert per a n també ho és per a $n+1$, perquè $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3-(n+1)}{3}$. Efectivament,

$$S_{n+1} = S_n + n(n+1) = \frac{n^3-n}{3} + n(n+1) = \frac{n^3-n+3n^2+3n}{3}$$
$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$$
$$\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1-n-1}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$$

b) Aplicarem que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^n = e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3S_n}{n^3+2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n}{n^3+2}\right)^{n^2} = \left(1^{+\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^3-n}{n^3+2}-1\right)^{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n-2}{n^3+2}\right)^{\frac{n^3+2}{-n-2}\cdot n^2\cdot\frac{-n-2}{n^3+2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-2n^2}{n^3+2}} = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$