1. Considereu les rectes $r_a : \begin{cases} x + 3y = a-6 \\ 2x + ay + z = 3, \end{cases}$ i el pla $\pi: \ x+y+z=5$

a) Trobeu les posicions relatives de r i π segons els diferents valors d'a.

b) Trobeu el pla paral·lel a π que conté la recta $s : \begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ x - z = 2\,. \end{cases}$

a) Anomenem A i $A|B$ les matrius del sistema i l'ampliada que resulten de les equacions de les rectes r_a i del pla π. Llavors,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A|B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & a-6 \\ 2 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a+3+0-1-6-0 = a-4 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{a \neq 4} \Longrightarrow \det A \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3 = r(A|B). \\ a = 4 \Longrightarrow \det A = 0 \Longrightarrow r(A) < 3. \end{cases}$$

Per al cas $\boxed{a=4}$ obtenim $r(A) = 2 = r(A|B)$, perquè

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 4-6 \\ 2 & 1 & 3 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 5 \end{vmatrix} = 5-4+0+2-3-0 = 0.$$

Conclusió:

• $\boxed{a \neq 4}$ $\Longrightarrow$ Sistema comp. determinat (solució única). Per tant, **la recta i el pla es tallen en un punt únic**.

• $\boxed{a = 4}$ $\Longrightarrow$ Sistema comp. indeterminat (amb solucions que depenen d'un paràmetre). Per tant, **la recta està continguda en el pla**.

b) Considerem el feix de plans que conté la recta s:

$$\Pi_\alpha: \ 3x+y-z-8+\alpha(x-z-2) = 0 \quad \text{o} \quad x-z-2=0.$$

L'últim pla no és paral·lel a π perquè els coeficients de les variables no són proporcionals. Per tant, si n'hi ha algun es troba entre els $\Pi_\alpha : (3+\alpha)x + y - (1+\alpha)z - 8 - 2\alpha = 0$.

$$\pi \text{ i } \Pi_\alpha \text{ paral·lels} \Longrightarrow \frac{1}{3+\alpha} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-1-\alpha} \neq \frac{5}{8+2\alpha} \Longrightarrow \alpha = -2.$$

Conseqüentment, la solució és el pla $\boxed{x+y+z-4=0}$.

2. Considereu els vectors $\vec{u} = (1,-4,a)$, $\vec{v} = (5,-8,3)$ i $\vec{w} = (-5,2,3)$.

a) Trobeu el valor d'a per tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment dependents.

b) Expresseu $\vec{u}$ com a combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$ per al valor que heu trobat a l'apartat anterior.

c) Trobeu les equacions implícites de la recta que passa pel punt $A(1,-1,2)$, tal que la seva direcció és perpendicular a les dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

a) $\vec{u},\ \vec{v}$ i $\vec{w}$ són l.d. $\Longleftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -4 & -8 & 2 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Longleftrightarrow -24+10a+60-40a-6+60=0 \Longleftrightarrow -30a+90=0 \Longleftrightarrow \boxed{a=3}.$$

b) $(1,-4,3)=\alpha(5,-8,3)+\beta(-5,2,3) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1= & 5\alpha-5\beta \\ -4= & -8\alpha+2\beta \\ 3= & 3\alpha+3\beta \end{array}\right. \overset{\substack{F_3/3\longrightarrow F_1 \\ F_2/2\longrightarrow F_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta & \alpha \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \end{array}$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta & \alpha \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & 6 \end{array}\right) \end{array} \Longleftrightarrow \alpha=\frac{3}{5},\ \beta=\frac{2}{5} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{v}+\frac{2}{5}\vec{w}}.$$

c) Qualsevol vector director de la recta és de la direcció de $\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & -8 & 3 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$=-30\cdot(1,1,1)$. Per tant, la recta es podrà presentar,

$$x-1=y+1=z-2 \Longleftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-z=-1. \end{array}\right.}$$

3. Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trobeu raonadament

a) La matriu A^{-1} i feu la comprovació del resultat.

b) Totes les matrius X que commuten amb A. (És a dir, $A\cdot X=X\cdot A$.)

a) Es tracta de resoldre simultàniament els dos sistemes que resulten de la condició d'inversa,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|rc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rc|rr} 24 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|rr} 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right).$$

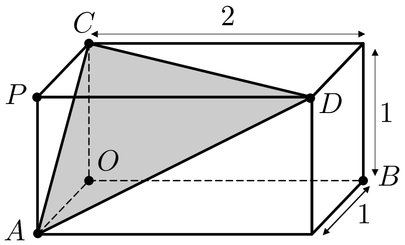
Llavors, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{8} & 0 \\ 0 & \frac{8}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}}.$

b) Imposem que es compleixi la commutativitat,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+z=3x+y \\ x+3z=3z+t \\ 3y+t=x+3y \\ y+3t=z+3t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=y=\alpha\in\mathbb{R} \\ x=t=\beta\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

Per tant les matrius que commuten són $\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}}$.

4. Considereu l'ortoedre de la figura en què $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ i $|\overrightarrow{OB}| = 2$.



Indicació: Considereu la referència ortonormal

$$\{O; \overrightarrow{OA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\},$$

en què $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(0,0,1)$.

a) Calculeu la distància del punt P al pla Π_{ACD} que conté els punts A, C i D.

b) Trobeu la relació entre les longituds dels segments en què queda partida la diagonal PB pel pla Π_{ACD}.

c) Trobeu l'angle del diedre format pels plans Π_{ACD} i el pla Π_{CPD} que conté els punts C, P i D.

a) Tenim els punts $P(1,0,1)$ i $D(1,2,1)$. Llavors,

– Equació de Π_{ACD}: $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AX}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2x - y + 2z - 2 = 0$

– $d(P, \Pi_{ACD}) = \dfrac{|2+2-2|}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

b) El punt que determina la partició de la diagonal és del tipus $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$. Cal imposar que pertanyi al pla Π_{ACD}. Treballem amb les coordenades de X:

$$X : \begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot (-1) \\ y = 0 + \lambda \cdot 2 \\ z = 1 + \lambda \cdot (-1) \end{cases} \Longrightarrow \Pi_{ACD} \cap r_{PB} : 2(1-\lambda) - 2\lambda + 2(1-\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3}.$$

Per tant,

$$\overrightarrow{PX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XB}) \Longrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{PX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} \Longrightarrow \boxed{\frac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{XB}|} = \frac{1}{2}}.$$

c) L'angle α que formen els dos plans és igual a l'angle que formen els seus vectors ortogonals.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector ortogonal a } \Pi_{CPD} = (0,0,1) \\ \text{Vector ortogonal a } \Pi_{ACD} = (2,-1,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{|(0,0,1)(2,-1,2)|}{\sqrt{0+0+1}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = 48^\circ 11' 22''}.$$