1. Considereu la successió $a_n = \dfrac{5n+2}{4n}$.
Trobeu-ne els termes a_n que es troben en un entorn de centre 1.26 i radi 10^{-2}. Quina condició imposa sobre el límit de la successió el resultat obtingut?

$$a_n \in E_{0.01}(1.26) \iff 1.25 < \frac{5n+2}{4n} < 1.27 \iff 5n < 5n+2 < 5.08n \iff 5.08n - 5n > 2$$
$$\iff 0.08n > 2 \iff n > \frac{2}{0.08} = 25.$$

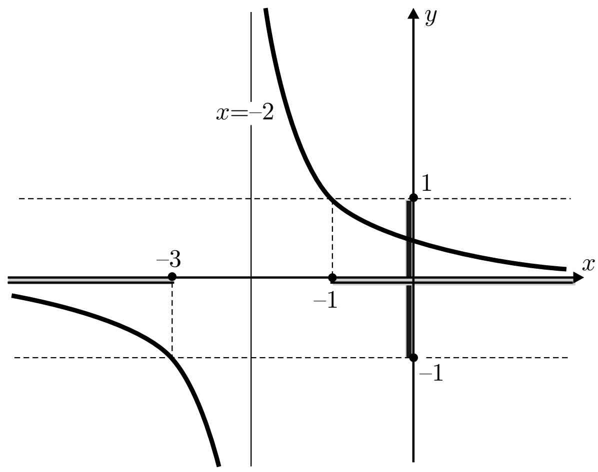
Conclusió: En aquest entorn trobem el terme a_{26} i tots els que el segueixen. Conseqüentment, si existeix el límit ha d'estar a l'interval $[1.25, 1.27]$.

2. Trobeu el domini de la funció $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$ i les cotes superiors, les cotes inferiors, el suprem, l'ínfim, el màxim i el mínim d'aquest domini.

Cerquem el conjunt

$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tals que } -1 \le \frac{1}{x+2} \le 1 \right\}.$$

Si observem el gràfic de $y = \dfrac{1}{x+2}$ i tenim en compte que



$$\frac{1}{x+2} = -1 \Longrightarrow x+2 = -1 \Longrightarrow x = -3$$
$$\frac{1}{x+2} = 1 \Longrightarrow x+2 = 1 \Longrightarrow x = -1,$$

deduïm que $\boxed{\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)}$.

Quant a la segona qüestió no existeix cap dels elements esmentats.

3. Resoleu i/o calculeu:

a) Un capital està sotmès a interès compost del 8.5% anual amb capitalització anual. Quants anys han de passar perquè es dupliqui? I si l'interès és continu?
b) $\log_3 2$.
c) $4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 1 = 0$.
d) $3\log x - \log(21x - 20) = 0$.

a) $2 = 1.085^t \Longrightarrow t = \log_{1.085} 2 \Longrightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1.085} = 8.4965 \Longrightarrow \boxed{t = 9 \text{ anys}}$.

$2 = e^{0.085t} \Longrightarrow 0.085t = \ln 2 \Longrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0.085} \approx \boxed{8.155 \text{ anys}}$.

b) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0.6309297.$

c) $\quad 4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 1 = 0 \Longrightarrow 4\left(\cdot 2^x\right)^2 + 3 \cdot 2^x - 1 = 0$

$$\Longrightarrow 2^x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{array}{l} \nearrow \ \dfrac{1}{4} \\ \searrow \ -1 \end{array} \Longrightarrow 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Longrightarrow \boxed{x = -2}.$$

d) $\quad 3\log x - \log(21x - 20) = 0 \Longrightarrow \log x^3 = \log(21x - 20) \Longrightarrow x^3 = 21x - 20.$

Si apliquem la regla de Ruffini, obtenim

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -21 & 20 \\ 1 & & 1 & 1 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 1 \ \text{ o } \ x^2 + x - 20 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 4,\ x = -5$$

Comprovem les solucions i són bones $\boxed{x = 4,\ x = 1}$.

4. El terme general de la successió $1, 5, 13, 29, 61, \cdots$, és $a_n = 2^{n+1} - 3$. Demostreu que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2^{n+2} - 3n - 4.$$

Resolució 1: Per inducció

- Per a $n = 1$ és cert perquè $a_1 = 1$ i $2^{1+2} - 3 \cdot 1 - 4 = 8 - 3 - 4 = 1$.
- Suposem-ho cert per a n i ho demostrarem per a $n + 1$:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} &= 2^{n+2} - 3n - 4 + a_{n+1} = 2^{n+2} - 3n - 4 + 2^{(n+1)+1} - 3 \\ &= 2 \cdot 2^{n+2} - 3n - 4 - 3 = 2^{(n+1)+2} - 3(n+1) - 4 \end{aligned}$$

Resolució 2: Amb progressions geomètriques

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= 2^2 - 3 + 2^3 - 3 + \cdots + 2^{n+1} - 3 = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} - 3n \\ &= \frac{2^2\left(2^n - 1\right)}{2 - 1} - 3n = 4\left(2^n - 1\right) - 3n \\ &= 2^{n+2} - 4 - 3n = 2^{n+2} - 3n - 4 \end{aligned}$$

5. Calculeu

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+5}{n+3} \right).$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{\frac{2-n^2}{n}}.$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{16n-3}}{\sqrt{4n}} \right).$

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+5}{n+3} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5n - 5}{n^2 + 4n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \dfrac{5}{n} - \dfrac{5}{n^2}}{1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2}} = \boxed{2}.$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\dfrac{2-n^2}{n}} = \left(\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{\frac{-\infty}{\infty}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2+\dfrac{1}{n}}\right)^{\dfrac{\frac{2}{n^2}-1}{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = \boxed{+\infty}.$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{16n-3}}{\sqrt{4n}}\right) = \left(\frac{\infty-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}} - \sqrt{4-\frac{3}{4n}}\right) = \frac{1}{2} - 2 = \boxed{-\frac{3}{2}}.$

Qüestió opcional:
Enunciеu l'axioma de Weirstrass per a successions creixents. Demostreu un enunciat equivalent per a successions decreixents.

L'axioma de Weirstrass afirma que en el conjunt dels reals, tota successió creixent acotada superiorment té límit (s'entén finit). Gràcies a aquest axioma podem assegurar l'existència de nombres com e, $\sqrt{2}$, π, ...

A partir d'aquest axioma es pot demostrar que

per a successions decreixents acotades inferiorment també existeix límit finit

Demostració:
Sigui la successió de reals b_n i el nombre $K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

- $b_{n+1} < b_n$
- $b_n > K$.

Llavors, si definim $x_n = -b_n$, resulta que $\forall n \in \mathbb{N}$

- $x_n = -b_n < -b_{n+1} = x_{n+1} \Longrightarrow x_n$ és creixent.
- $x_n = -b_n < -K \Longrightarrow x_n$ està acotada superiorment.

Per tant, per l'axioma de Weirstrass, x_n té límit $A \in \mathbb{R}$.
Conseqüentment, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (-x_n) = -\lim_{n\to\infty} x_n = -A \in \mathbb{R}$.