IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT — 5/XI/2007
Nombres reals, successions, i funcions-II — $2+4+2+2$

---

1. Sigui la successió $a_n = \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}$.

a) Demostreu que $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

b) Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{(a_n)^{\frac{2n^2}{1+3n}}}$

---

a) **Resolució 1 (per progressions aritmètiques):** $2,\ 4,\ \ldots,\ 2n$ és una progressió aritmètica de diferència 2. Llavors

$$a_n = \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2} = \frac{\frac{2+2n}{2}\cdot n}{n^2} = \frac{(1+n)n}{n^2} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Resolució 2 (per inducció):

- Per a $n=1$ és cert perquè $a_1 = \dfrac{2}{1^2} = \dfrac{2}{1} = 2$ i $1+\dfrac{1}{1} = 1+1 = 2$.
- Suposem-ho cert per a n i ho demostrarem per a $n+1$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2+4+6+\cdots+2(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)}{(n+1)^2} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} + \frac{2(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n^2}{1+3n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{1+3n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{n}{1+3n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+3n}} = \boxed{\sqrt[3]{e}}.$$

---

2. Siguin les funcions $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$ i $g(x) = \ln x$.

a) Representeu $f(x)$ gràficament a partir de les seves asímptotes.

b) Trobeu l'asímptota oblíqua de la funció $s(x) = x\cdot f(x)$.

c) Calculeu $(g\circ f)^{-1}(1)$.

d) Trobeu el màxim, el mínim, el suprem i l'ínfim del conjunt $A = \text{Dom}\,(g\circ f)$.

e) Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}(g\circ f)(x)$.

a) Asímptota vertical.

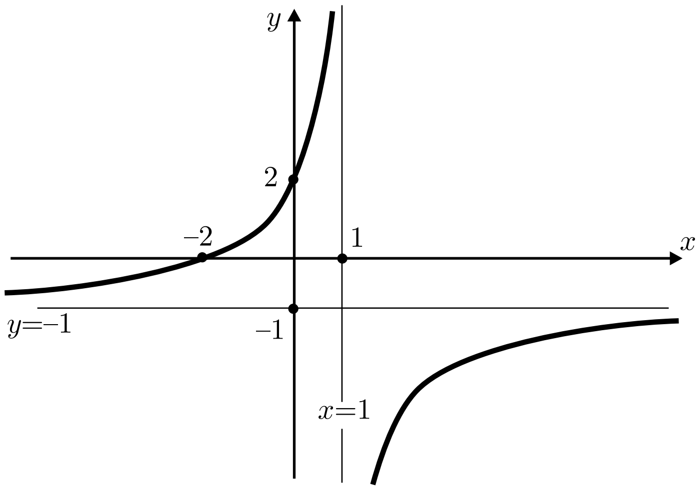
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x=1}.$$

Asímptota horitzontal.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\Longrightarrow \boxed{y=-1}.$$



Talls amb els eixos: $\left.\begin{array}{l}f(0) = \dfrac{2+0}{1-0} = 2 \\ f(x) = 0 \Longrightarrow 2+x=0 \Longrightarrow x=-2\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{(0,2) \text{ i } (-2,0)}.$

b) L'asímptota oblíqua té l'equació $y = ax+b$, en què

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = (\text{fet més amunt}) = -1 \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+x^2}{1-x} - (-1)x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{1-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\frac{1}{x}-1} = \frac{3}{0-1} = -3 \end{aligned}$$

Per tant, l'asímptota oblíqua és $\boxed{y=-x-3}$.

c) $(g\circ f)^{-1}(1) = x \Longrightarrow (g\circ f)(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right) = 1$. Resolem aquesta equació,

$$\ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) = 1 \Longleftrightarrow \frac{2+x}{1-x} = e \Longleftrightarrow 2+x = e - e\,x \Longleftrightarrow x(1+e) = e-2 \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{e-2}{e+1}}.$$

d) $x \in \text{Dom}\,(g\circ f) \Longleftrightarrow \dfrac{2+x}{1-x} > 0$. Si observem la hipèrbola de l'apartat (a) veiem que els punts d'imatge positiva són els del conjunt $A = (-2,1)$. Aquest conjunt té la màxima cota inferior en $x=-2$ i la mínima cota superior en $x=1$. Per tant $\boxed{\sup(A) = 1,\ \inf(A) = -2}$. En canvi, en ser l'interval obert, $\boxed{A \text{ no té màxim ni mínim}}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln(0^+) = \boxed{-\infty}$.

3. Calculeu:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3+2x}{x-1}-\frac{x^5+2x}{x^2-x}\right) \qquad\qquad \text{b) } \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-5x}.$$

a) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3+2x}{x-1}-\frac{x^5+2x}{x^2-x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3+2x}{x-1}-\frac{x^4+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^4+x^3+2x-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(-x^3+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(-x^3+2) = \boxed{1}.$$

b) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{4+x-9}{(x^2-5x)\left(\sqrt{4+x}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x(x-5)\left(\sqrt{4+x}+3\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{x\left(\sqrt{4+x}+3\right)} = \frac{1}{5\cdot 6} = \boxed{\frac{1}{30}}.$$

4. Resoleu dues de les quatre qüestions següents.

i) Considereu una successió (a_n) tal que $\forall n \geq 3200$ es compleix $a_n \in (-1,3)$.

(a) La successió té límit? Per què?

(b) Calculeu raonadament $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

ii) Trobeu el valor de $k\in\mathbb{R}$ tal que en $x=1$ sigui contínua la funció

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-k\,x & \text{si} \quad x\geq 1. \end{cases}$$

iii) Enuncieu el teorema de Bolzano i raoneu si es pot utilitzar per assegurar que l'equació $\cos x = x$ té alguna solució a l'interval $\left(\dfrac{9\pi}{40}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

iv) Resoleu l'equació $\quad 9\,e^{3x}+9e^{2x}-e^x-1=0.$

i.a) No es pot assegurar. Pot ser que en tingui i pot ser que no en tingui. Només cal trobar un exemple de cada cas.

- La successió $\begin{cases} a_{2n-1}=0 \\ a_{2n}=1, \end{cases}$ satisfà les condicions de l'enunciat i no té límit.
- La successió $a_n = \dfrac{1}{n}$, satisfà les condicions de l'enunciat i té límit.

i.b) $$\frac{-1}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{3}{n} \Longrightarrow 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0}.$$

ii) la funció f és contínua per la dreta en el punt $x = 1$, en ser $x^2 - kx$ un polinomi. Llavors, perquè f sigui contínua només cal imposar $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$,

$$\lim_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} = f(1) = 1 - k \Longrightarrow \boxed{k = 1 + \frac{\pi}{2}}.$$

iii) **Enunciat del teorema:** Si una funció f és contínua en $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, llavors existeix $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Si considerem la funció $f(x) = \cos x - x$, compleix les hipòtesis del teorema de Bolzano a l'interval $\left[\frac{9\pi}{40}, \frac{\pi}{4}\right]$. Efectivament,

en ser diferència de dues funcions contínues en $\mathbb{R}$ és contínua en $\mathbb{R}$. Per tant, f és contínua en $\left[\frac{9\pi}{40}, \frac{\pi}{4}\right]$. A més, $f\left(\frac{9\pi}{40}\right) \approx 0.0535 > 0$, $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.0783 < 0$.

$$\boxed{\text{Llavors existeix } \alpha \in \left(\frac{9\pi}{40}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ tal que } f(\alpha) = \cos\alpha - \alpha = 0, \text{ és a dir } \cos\alpha = \alpha}.$$

iv) Apliquem la regla de Ruffini sobre l'equació que resulta de fer $z = e^x$.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 9 & 9 & -1 & -1 \\ -1 & & -9 & 0 & 1 \\ \hline & 9 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow z = -1 \text{ o } 9z^2 - 1 = 0 \Longrightarrow z = -1,\ z = -\frac{1}{3},\ z = \frac{1}{3}.$$

En ser els valors de la funció exponencial positius només s'obté la solució

$$e^x = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{x = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3}.$$