IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT — 28/XI/2007
Nombres reals, successions, i funcions-III — $2 + 2 + 2.5 + 2 + 1.5$

1. Resoleu dues de les tres qüestions següents:

a) Calculeu el límit de la successió $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{4}\right)^4, \left(\frac{3}{5}\right)^6, \left(\frac{4}{6}\right)^8, \left(\frac{5}{7}\right)^{10}, \ldots$

b) Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Demostreu que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$.

c) Hem sotmès 16000 euros a un interès compost del 5% anual amb capitalització mensual. Quant de temps ha passat (en anys i mesos) si s'ha obtingut un capital de 23069.09 euros?

a) El terme general de la successió és $a_n = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n}$. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-2}}\right)^{\frac{n+2}{-2}}\right]^{\frac{-2\cdot\, 2n}{n+2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\, 2n}{n+2}} = \boxed{e^{-4} = \frac{1}{e^4}}.$$

b) Demostrem les dues etapes de la inducció:

• Per a $n = 1$ és certa perquè $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{(-1)^1\cdot 1!}{(1+x)^{1+1}}$.

• Si per a n és certa també ho és per a $n+1$, perquè

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n\, n!\,(-n-1)\,(1+x)^{-n-2} = \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}.$$

c) Utilitzem la fórmula del capital obtingut a interès compost amb període mensual, en t anys:

$$23069.09 = 16000\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12\,t} \implies \ln\frac{23069.09}{16000} = 12\,t\,\ln\left(1+\frac{0.05}{12}\right)$$
$$\implies t = \frac{\ln\frac{23069.09}{16000}}{12\,\ln\left(1+\frac{0.05}{12}\right)} = 88 = \boxed{7 \text{ anys i } 4 \text{ mesos}}.$$

Resoleu una de les dues qüestions següents:

2A. Sigui la funció $f(x) = \ln(4x^2-9)$.

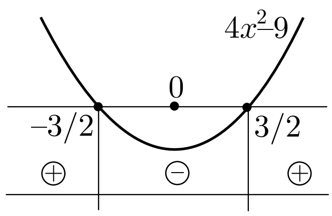
a) Trobeu el seu domini.

b) Trobeu les seves funcions inverses f^{-1}.

c) Calculeu els punts x tals que $f'(x) = 1$.

d) Calculeu $\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)$.

a) El domini està constituït pels x tals que $4x^2-9 > 0$. Si observem el gràfic de la paràbola $y = 4x^2-9$ i estudiem els seus signes, concloem que el domini és



$$\boxed{\left(-\infty\,,\,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\,,\,+\infty\right)}.$$

b) Per trobar la inversa intercanviem els papers de les dues variables.

$$x = \ln\left(4\left(f^{-1}(x)\right)^2 - 9\right) \implies e^x = 4\left(f^{-1}(x)\right)^2 - 9 \implies \frac{e^x+9}{4} = \left(f^{-1}(x)\right)^2$$
$$\implies \boxed{f_1^{-1}(x) = \frac{\sqrt{e^x+9}}{2} \quad \text{i} \quad f_2^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{e^x+9}}{2}}.$$

c) Cerquem els punts x tals que $f'(x) = 1$ en el domini.

$$f'(x) = 1 \implies \frac{8x}{4x^2-9} = 1 \implies 4x^2 - 8x - 9 = 0$$
$$\implies x = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{4} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 2.803 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx -0.803\,. \end{cases}$$

L'única solució bona és $\boxed{x \approx 2.803}$, perquè l'altra no pertany al domini de f.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \ln(4x^2-9) = \ln\left(0^+\right) = \boxed{-\infty}$. (Per obtenir 0^+ observeu el gràfic de l'apartat (a).)

2B. Considereu la funció $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 7x - 2$.

a) Trobeu una funció $Q(x)$ tal que $f(x) = (x-2)\cdot Q(x)$.

b) Mitjançant el teorema de Bolzano aproximeu una arrel de $Q(x)$ entre dos enters consecutius.

c) Estudieu la monotonia de $Q(x)$.

d) Utilitzeu els resultats anteriors per esbrinar raonadament quantes arrels té $f(x)$.

a) Si fem la divisió entre $f(x)$ i $x-2$ obtenim $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x + 1$.

b) Observem que $Q(x)$ és contínua i $\left\{\begin{array}{l} Q(-1) = -2+2-4+1 = -3 < 0 \\ Q(0) = 1 > 0 \end{array}\right\}$ implica, (pel teorema de Bolzano), que existeix una arrel de $Q(x)$ a l'interval $(-1, 0)$.

c) $Q'(x) = 6x^2 + 4x + 4$ té discriminant negatiu. Per tant, no té arrels i, en ser Q' contínua i $Q'(0) = 4 > 0$, tots els valors de $Q'(x)$ són positius. Això implica que la funció Q és sempre estrictament creixent.

d) Les arrels de f són $x = 2$ i les de $Q(x)$. Però per a $Q(x)$ hem trobat una arrel i, en ser creixent no en té cap més. Consegüentment, $\boxed{f(x) \text{ només té dues arrels}}$.

---

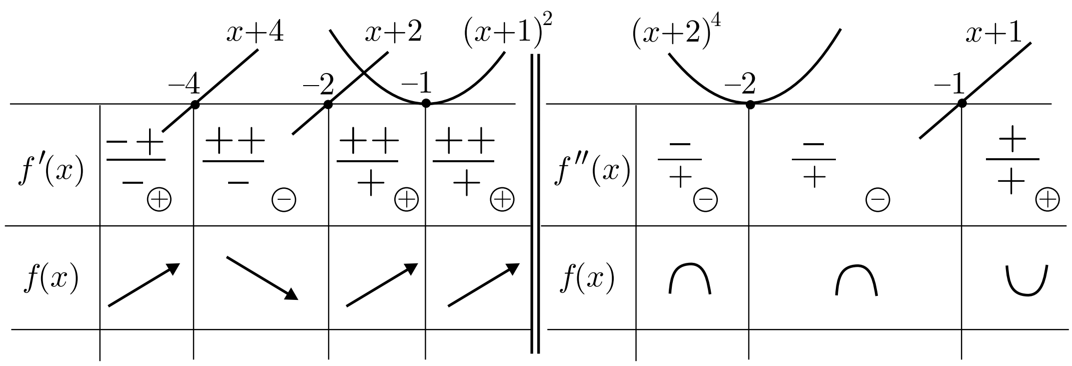
3. Considereu la funció f que s'adjunta i les seves derivades.

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2} \qquad f'(x) = \frac{(x+4)(x+1)^2}{(x+2)^3} \qquad f''(x) = \frac{6(x+1)}{(x+2)^4}\,.$$

a) Estudieu el signe de les derivades (gràficament) i interpreteu-lo.

b) Trobeu les asímptotes oblíqua i vertical de f, els talls amb els eixos de f i representeu la funció f gràficament.

a) Dels esquemes següents en resulta:



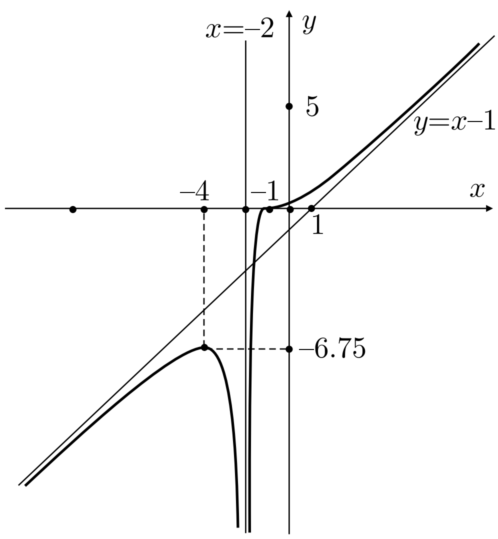
- f és monòtona creixent en $(-\infty, -4) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.
- f és monòtona decreixent en $(-4, -2)$.
- f és còncava avall en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1)$.
- f és còncava amunt en $(-1, +\infty)$.
- f presenta un màxim local en $x = -4$ i $f(-4) = -6.75$. (f'(-4)=0.)
- f presenta un punt d'inflexió en $x = -1$ i $f(-1) = 0$. (f"(-1)=0.)

b) Asímptota vertical: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \Longrightarrow \boxed{x=-2}$.

Asímptota oblíqua: $f(x) = ax + b$.

$$\left.\begin{aligned}
a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x+2)^2} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+\cdots}{x^3+4x^2+\cdots} \overset{(\div x^3)}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1 \\
b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2} - x &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3+3x^2+\cdots)-(x^3+4x^2+\cdots)}{x^2+4x+4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+\cdots}{x^2+\cdots} \overset{(\div x^2)}{=} \frac{-1+0}{1+0} = -1
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{y = x-1}.$$

El tall amb l'eix de les abscisses és $(-1, f(-1) = 0)$. El tall amb l'eix d'ordenades és $y = f(0) = \frac{1}{4}$. A partir de tota la informació en resulta el gràfic següent:



4. Un tren de mercaderies ha de transportar una càrrega, amb velocitat constant, al llarg de 600 km. Sabem que el preu del combustible és d'1 euro el litre i el seu consum és de $120+\dfrac{x^2}{12}$ litres per hora, en què x és la velocitat en km/h. El salari total dels operaris és de 150 euros l'hora.

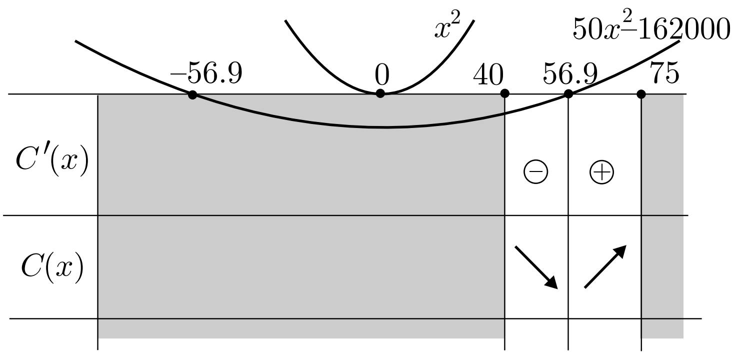
a) Demostreu que el cost del transport ve descrit per la funció $C(x) = 50x + \dfrac{162000}{x}$.

b) Si la velocitat del tren ha de complir $40 \le x \le 75$ km/h, trobeu per a quina velocitat el cost del transport serà mínim i per a quina serà màxim. Digueu quins són aquests costos.

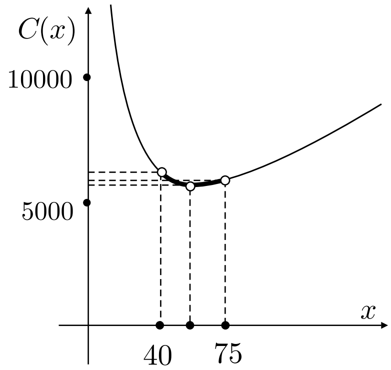
a) Cost=Cost del combustible + Cost dels operaris. Llavors, en ser $\dfrac{600}{x}$ el temps invertit,

$$C(x) = \left(120 + \frac{x^2}{12}\right) \cdot \frac{600}{x} \cdot 1 + 150 \cdot \frac{600}{x} = \frac{72000}{x} + 50x + \frac{90000}{x} = 50x + \frac{162000}{x}.$$

b) Estudiem la derivada $C'(x) = 50 - \dfrac{162000}{x^2} = \dfrac{50x^2 - 162000}{x^2}$.



$\Longrightarrow$



En el gràfic adjunt apareix el punt $x \approx 56.92$ que té derivada nul·la. De l'estudi de la monotonia és conclou que en aquest punt hi ha mínim absolut i $C(56.92) \approx 5692.10$ euros. Per trobar el màxim absolut cerquem $C(40) = 6050$ i $C(75) = 5910$. Conclusió:

Mínim absolut: a 56.92 km/h el cost és de 5692 euros.
Màxim absolut: a 40 km/h el cost és de 6050 euros.

5. Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \lambda x & \text{si} \quad x < 1 \\ \arctan x & \text{si} \quad x \ge 1. \end{cases}$

a) Trobeu el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que f sigui contínua.

b) Representeu-la gràficament. (No cal estudiar les derivades.)

a) Imposem que sigui contínua.

$$\lim_{x\to 1^-} (-x^2 + \lambda x) = \arctan 1 = \lim_{x \to 1^+} \arctan x \Longrightarrow -1 + \lambda = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1 + \frac{\pi}{4} \approx 1.785}.$$

b) Dibuixem la paràbola i la funció $\arctan x$ i descartem les parts del domini que no considera l'enunciat. La paràbola talla l'eix OX en $x = 0$ i $x \approx 1.785$. Per tant, té el vèrtex abans d'$x = 1$. A més té les branques avall perquè el coeficient de la part quadràtica és negatiu. En resulta el gràfic adjunt.