1. Sigui la successió $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Demostreu per inducció que $s_n = \frac{n}{n+1}$.

b) Raoneu la possibilitat que en un entorn de centre 1.2 hi hagi un nombre infinit de termes de la successió s_n.

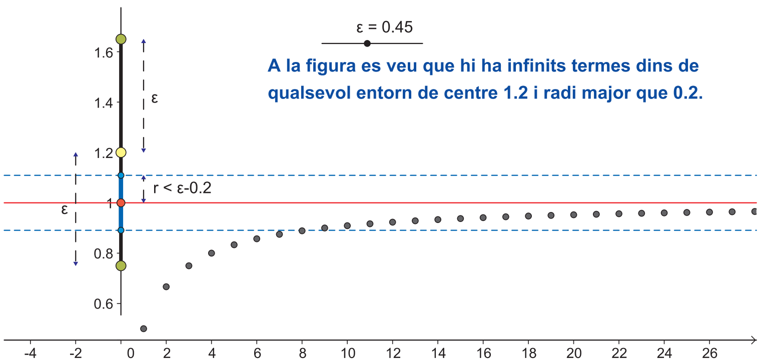
a) Demostració:

- Per a $n=1$ és cert perquè, si $n=1$, $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1}$
- Suposem-ho cert per a n (hipòtesi d'inducció).
- Cal demostrar que és cert per a $n+1$. Efectivament,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{(QED)} \end{aligned}$$

b) Observem que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$.

Llavors, tots els entorns $\mathrm{E}_\varepsilon(1.2)$, amb $\varepsilon > 0.2$, contenen infinits termes de la successió. Això es justifica perquè si considerem els entorns $\mathrm{E}_r(1)$, amb $r < \varepsilon - 0.2$, aquests contenen infinits termes de la successió i estan continguts en $\mathrm{E}_\varepsilon(1.2)$.



2. Resoleu: a) $2\log x - \log(x+3) + \log\left(\frac{5}{2}\right) = 1$. b) $e^{3x} - 4e^{2x} - 7e^x + 10 > 0$.

a) $2\log x - \log(x+3) + \log\left(\frac{5}{2}\right) = 1 \Longrightarrow \log\frac{5x^2}{2x+6} = 1 \Longrightarrow \frac{5x^2}{2x+6} = 10 \Longrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$$\Longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4 = \begin{cases} 6 \\ -2. \end{cases}$$

Es comprova que $\boxed{x=6}$ és solució. L'altre solució no és admissible en no existir $\log(-2)$.

b) Fem $e^x = z$. Llavors, en ser $-2,\ 1,\ 5$, les arrels del polinomi $z^3-4z^2-7z+10$ i ser aquest positiu en $(-2,1)\cup((5,+\infty)$, tenim que $e^{3x}-4e^{2x}-7\,e^x+10>0$ equival a,

$$\left.\begin{array}{c} -2<e^x<1 \\ \text{o bé} \\ e^x>5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x<\ln 1=0 \\ \text{o bé} \\ x>\ln 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x\in(-\infty,0)\cup(\ln 5,+\infty)}.$$

3. Calculeu detalladament:

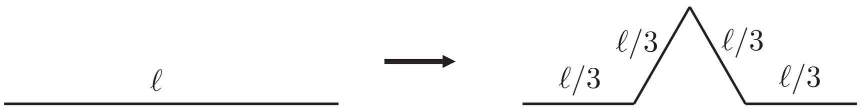
a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}-n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n+2}\right)^{1-\dfrac{n}{2}}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{1-\dfrac{n}{2}}$.

$$\text{a) }\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}-n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{0-1}{\sqrt{1+0+0}}=\boxed{-1}.$$

$$\text{b) }\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n+2}\right)^{1-\dfrac{n}{2}}=\left(1^{-\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)}\right]^{\frac{1-n/2}{-(n+2)}}=e^{1/2}=\boxed{\sqrt{x}}.$$

$$\text{c) }\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{1-\dfrac{n}{2}}=\left(\frac{1}{+\infty}\right)^{-\infty}=\left(0^+\right)^{-\infty}=\frac{1}{(0^+)^{+\infty}}=\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}.$$

4. Un segment de longitud ℓ és sotmès al procés de formació de la corba de Koch. Calculeu el nombre d'iteracions mínim que cal efectuar per tal que la longitud de la línia poligonal resultant superi la longitud $\boxed{10^{12}\cdot\ell}$.



Anomenem l_n la successió de longituds que resulten de les successives etapes. Llavors,

$$l_1=\ell,\ l_2=4\cdot\frac{\ell}{3},\ \ldots,\ l_n=4\cdot\frac{l_{n-1}}{3}\ \Longrightarrow\ l_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\ell.$$

L'enunciat demana que es compleixi $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\ell>10^{12}\cdot\ell$, la qual cosa equival a

$$(n-1)\log\left(\frac{4}{3}\right)>12\log 10=12\Longleftrightarrow n>\frac{12}{\log 4/3}+1>96.04.$$

Cal repetir el procés des de l_2 fins a l_{98}, és a dir $\boxed{\text{97 vegades}}$.

5. Trobeu el domini, el recorregut i la funció inversa de $f(x)=\sqrt{1+\ln(2+x)}$.

- $x\in\mathrm{Dom}(f)\Longleftrightarrow 1+\ln(2+x)\ge 0\Longleftrightarrow \ln(2+x)\ge -1\Longleftrightarrow 2+x\ge e^{-1}\Longleftrightarrow \boxed{x\ge\dfrac{1}{e}-2}$.
- En ser $1+\ln(2+x)$ creixent el seu valor mínim és 0 per a $x=\dfrac{1}{e}-2$. Per tant el recorregut de $f(x)$, en ser $y=\sqrt{x}$ creixent, és $\boxed{[0,+\infty)}$.
- $x=\sqrt{1+\ln\left(2+f^{-1}(x)\right)}\Longrightarrow x^2-1=\ln\left(2+f^{-1}(x)\right)\Longrightarrow e^{x^2-1}=2+f^{-1}(x)\Longrightarrow\boxed{f^{-1}(x)=e^{x^2-1}-2}$, en què el seu domini queda restringit al recorregut de $f(x)$.