

Responen a CINC de les sis qüestions següents. Expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.  
Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció  $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-1} & , x < 2 \\ 9 - x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$

- a) Estudieu-ne la continuïtat en  $x = 1$  i  $x = 2$ . [1 punt]  
b) Representeu-la gràficament sense recórrer al càlcul de derivades. [1 punt]

2. S'ha observat que una població d'insectes s'està extingint. S'ha pogut trobar un patró que explica com evoluciona el nombre d'insectes  $I(t)$  en funció del temps  $t$ , en setmanes, transcorregut des del primer recompte. La funció trobada és

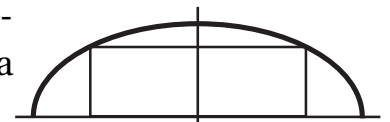
$$I(t) = 12000 e^{-0.2 t}.$$

- a) Quants insectes hi havia en el primer recompte, (en què  $t = 0$ )? [0.4 punts]  
b) Si actualment el nombre d'insectes ha disminuït un 40%, quantes setmanes han passat des del primer recompte? [0.8 punts]  
c) Quantes setmanes hauran passat aproximadament, quan quedi un sol individu en la població? [0.8 punts]

3. Considereu la funció  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 12$ . Sabem que l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa  $x=1$  és  $13x+y-33=0$ . Trobeu els valors de  $a$  i  $b$ . [2 punts]

4. Considereu l'el·lipse d'equació  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Considereu tots els rectangles inscrits entre els punts d'ordenada positiva del seu gràfic i l'eix de les abscisses, de manera que un costat del rectangle està contingut en aquest eix.



- a) Demostreu que l'àrea  $A(x)$  d'aquests rectangles en funció de l'abscissa  $x$  del seu vèrtex inferior dret és  $A(x) = \frac{4}{3} x \sqrt{9 - x^2}$ . [0.6 punts]  
b) Trobeu raonadament el rectangle que té àrea màxima. [1.4 punts]

5. Considereu la funció  $f(x) = x^2 e^x$ , i les seves derivades  $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$ ,  $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$ . Dibuixeu el seu gràfic a partir de la interpretació de  $f'$  i  $f''$  i de l'estudi de les asímptotes i els talls amb els eixos. ( $x^2 e^x = x^2 / e^{-x}$ ) [2 punts]

6. Demostreu que  $f(x) = x \ln x \implies f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$ ,  $\forall n \geq 2$ . [2 punts]