1. Sigui $A_1B_1C_1$ un triangle equilàter. Siguin $A_iB_iC_i$, $(i > 1)$, els triangles equilàters determinats pels punts mitjans dels costats de $A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}$. Si la longitud de $A_1B_1 = 1$, calculeu el valor de la suma de les àrees de tots els triangles $A_iB_iC_i$, $(i \geq 1)$.

La construcció dels triangles determina que el costat del triangle equilàter $A_iB_iC_i$ mesura la meitat del costat del triangle $A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}$. Per tant, en ser tots els triangles semblants, l'àrea S_i del triangle $A_iB_iC_i$ és la quarta part de l'àrea S_{i-1} del triangle $A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}$. Així, obtenim que la successió S_i de les àrees dels triangles estan en progressió geomètrica de raó $\dfrac{1}{4}$. El primer terme d'aquesta progressió és l'àrea S_1 del triangle $A_1B_1C_1$:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Finalment, la suma de totes aquestes àrees serà:

$$S_\infty = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

2. Demostreu per inducció la igualtat següent:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\,.$$

- Per a $n = 1$, la igualtat és certa, perquè:

$$1^2 = 1 \quad \text{i} \quad \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

- Suposem la igualtat certa per a n i la demostrem per a $n + 1$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2 = \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \\
&= \boxed{\frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + n + 1}{6} &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1}{6} = \\
&= \boxed{\frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}}.
\end{aligned}$$

Per tant, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + n + 1}{6}$.

3. Considereu la successió $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$. Trobeu una expressió no recurrent per a a_n.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3n - 2 = [a_{n-2} + 3(n-1) - 2] + 3n - 2 = \\
&= \Big[\, [a_{n-3} + 3(n-2) - 2] + 3(n-1) - 2 \Big] + 3n - 2 = \cdots = \\
&= a_1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + \cdots + 3\cdot(n-1) + 3\cdot n - \underbrace{2 - 2 \cdots - 2}_{(n-1)} \stackrel{(a_1 = 3\cdot 1)}{=} \\
&= 3\cdot(1 + 2 + \cdots n) - 2(n-1) = 3\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n - 2n + 2 = \\
&= \frac{3n + 3n^2 - 4n + 4}{2} = \boxed{\frac{3n^2 - n + 4}{2}}.
\end{aligned}$$

4. Sabem que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ i que, per tant, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$. Demostreu que,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)},$$

i que aquesta igualtat implica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

- Demostració de la igualtat:

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

- Càlcul del límit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

5. Construïu algunes files del triangle aritmètic i observeu-les:

a) Conjectureu quin és el valor de la suma

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n}{2}.$$

b) Deduïu-ne el valor de:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 2003\cdot 2004 + 2004\cdot 2005.$$

a)
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\implies \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

b) En ser cadascun dels sumands el doble dels coeficients binomials $\binom{n}{2}$,

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+2004\cdot 2005=\\
&=\ 2\cdot\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{2005}{2}\right]=\boxed{2\binom{2006}{3}}.
\end{aligned}$$

6. Trobeu tots els triangles rectangles tals que els seus costats estan en progressió aritmètica. (Indicació: Anomeneu els valors dels costats dels triangles $a-d$, a, $a+d$, en què a és el catet gran i d la diferència de la progressió formada per les longituds dels costats.)

Pel teorema de Pitàgoras es compleix $(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$. Per tant,

$$a^2+2ad+d^2=a^2+a^2-2ad+d^2 \implies a^2-4ad=0 \implies (a-4d)=0 \implies a=4d.$$

Els triangles cercats són els de costats $\boxed{3d, 4d, 5d}$, en què d és un nombre qualsevol.

7. Observeu els desenvolupaments de $(3+1)^n$ i $(3-1)^n$ i deduïu-ne el valor de

$$3^{16}+\binom{16}{2}3^{14}+\binom{16}{4}3^{12}+\cdots+\binom{16}{14}3^2+1.$$

Si observem els desenvolupaments i els sumem, obtenim:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
(3+1)^n &=& \binom{n}{0}3^n &+& \binom{n}{1}3^{n-1} &+& \binom{n}{2}3^{n-2} &+& \binom{n}{3}3^{n-3} &+\cdots+& \binom{n}{n}\\
(3-1)^n &=& \binom{n}{0}3^n &-& \binom{n}{1}3^{n-1} &+& \binom{n}{2}3^{n-2} &-& \binom{n}{3}3^{n-3} &+\cdots+& (-1)^n\binom{n}{n}\\
\hline
4^n+2^n &=& 2\cdot 3^n &+& 0 &+& 2\binom{n}{2}3^{n-2} &+& 0 &+\cdots+& (1+(-1)^n)
\end{array}$$

Llavors, si considerem $n=16$:

$$\begin{aligned}
&3^{16}+\binom{16}{2}3^{14}+\binom{16}{4}3^{12}+\cdots+\binom{16}{14}3^2+1=\\
&=\ \frac{1}{2}\left(2\cdot 3^{16}+2\binom{16}{2}3^{14}+2\binom{16}{4}3^{12}+\cdots+2\binom{16}{14}3^2+2\right)=\boxed{\frac{4^{16}+2^{16}}{2}}.
\end{aligned}$$