

Considereu la successió

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 \\ a_n &= \left(\frac{a_{n-1} - 7}{4}\right)^3 + 4\end{aligned}$$

a) Quins són els possibles valors del límit, en el cas d'existir?

Indicació: Supposeu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, la qual cosa implica $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = L \in \mathbb{R}$.

b) Demostreu que $2 \leq a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Indicació: Utilitzeu el mètode de demostració per inducció.

c) Demostreu que la successió a_n és creixent.

Indicació: Estudieu el signe de $a_n - a_{n-1}$.

d) Justifiqueu que la successió a_n té límit i trobeu el seu valor.

e) Supposeu que considerem la successió anterior, però definim el primer terme $a_1 = 1$. Demostreu per inducció que $a_n < 1$ i esbrineu si la successió té límit finit en aquest cas.

f) Intenteu explicar sobre el gràfic que s'adjunta tots els resultats que heu obtingut de manera analítica.

