1. S'ha comprovat que a partir d'un determinat instant, el nombre $N(x)$ d'individus d'una determinada població de bacteris evoluciona en funció del temps x, expressat en hores, segons la funció

$$N(x) = 10^6 \cdot e^{-0.1\,x}.$$

a) Quina és la població a l'instant inicial?

b) Quina és la població al cap de 48 hores?

c) Quantes hores han de passar per tal que la població sigui de 100000 individus?

d) Calculeu $\lim_{x\to+\infty} N(x)$ i interpreteu el resultat en termes d'hores i nombre d'individus.

e) Estudieu la monotonia i l'existència de màxims i mínims absoluts quan $x \in [0, +\infty)$.

a) A l'instant inicial tenim $t = 0$. Per tant, $N(0) = 10^6 \cdot e^0 = \boxed{10^6 \text{ individus}}$.

b) $N(48) = 10^6 \cdot e^{-0.1\cdot 48} = 10^6 \cdot e^{-4.8} \approx 10^6 \cdot 8.22975 \cdot 10^{-3} \approx \boxed{8230 \text{ individus}}$.

c) $N(x) = 100000 \Longleftrightarrow 10^6 \cdot e^{-0.1x} = 100000 \Longleftrightarrow e^{-0.1x} = 10^{-1} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow -0.1x = \ln(10^{-1}) \Longleftrightarrow x = \frac{\ln 10^{-1}}{-0.1} \approx \boxed{23.026 \text{ anys}}.$$

d) $\lim_{x\to+\infty} 10^6 \cdot e^{-0.1x} = 10^{-6} \cdot e^{-\infty} = 10^{-6} \cdot 0 = \boxed{0}$.

El nombre d'individus tendeix a zero. És a dir, la població té tendència a desaparèixer a mesura que passen les hores.

e) $N'(x) = 10^6 \cdot (-0.1) \cdot e^{-0.1x} = \boxed{-10^5 \cdot e^{-0.1x}}$.

En ser el resultat de l'exponencial sempre un nombre positiu, la derivada és negativa per a tots els valors de x. Concretament a l'interval $(0, +\infty)$, $N(x)$ és monòtona decreixent i, en ser contínua, té un màxim absolut a l'interval $[0, +\infty)$ en el punt $x = 0$ i el seu valor és 10^6.

2. Sigui la funció $f(x) = x^3$.

a) Demostreu, mitjançant la definició de derivada, que si $f(x) = x^3$, llavors $f'(x) = 3x^2$.

b) Trobeu les equacions de les rectes tangents al gràfic de f que són paral·leles a la recta d'equació $12x - y + 3 = 0$.

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2.$$

b) En ser paral·leles a la recta de pendent 12, hem de trobar els punts en què $f'(x) = 12$. Aquests seran els punts de tangència de les rectes buscades i el gràfic de f.

$$f'(x) = 12 \Longleftrightarrow 3x^2 = 12 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm 2.$$

Així, tenim els punts de tangència $(2,8)$ i $(-2,-8)$ i les tangents són:

$$y-8 = 12(x-2) \iff \boxed{y = 12x-16}.$$
$$y+8 = 12(x+2) \iff \boxed{y = 12x+16}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x}{(2x-4)^2}$.

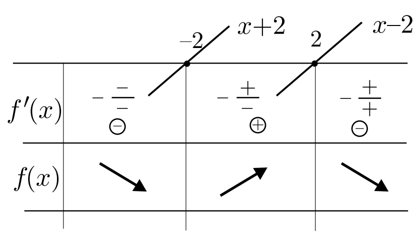
a) Calculeu $f'(x)$, $f''(x)$, els intervals de monotonia i concavitat, —tal com demanem sempre—, i les asímptotes horitzontal i vertical.

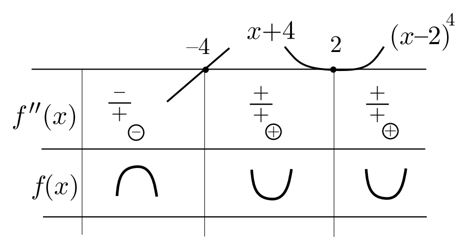
b) Representeu la funció f gràficament, a partir de la informació anterior.

a) $f(x) = \dfrac{x}{(2x-4)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{(x-2)^2} \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^2-2(x-2)x}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)\big((x-2)-2x\big)}{4(x-2)^4} = \boxed{-\,\frac{x+2}{4(x-2)^3}}.$$

$$f''(x) = -\,\frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^3-3(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^6} = -\,\frac{(x-2)^2\big((x-2)-3(x+2)\big)}{4(x-2)^6} =$$
$$= -\,\frac{(x-2)-3(x+2)}{4(x-2)^4} = -\,\frac{-2x-8}{4(x-2)^4} = \boxed{\frac{x+4}{2(x-2)^4}}.$$





Monòt.creix.: $(-2,2)$. Monòt.decreix.: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Mín.local: $(-2,-1/32)$.
Cònc.amunt: $(-4,2)\cup(2,+\infty)$. Cònc.avall: $(-\infty,-4)$. Punt infl.: $(-4,-1/36)$.

- Asímptota vertical: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{(2x-4)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \boxed{x=2}$.

- Asímptota horitzontal: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(2x-4)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2-\frac{16}{x}+\frac{16}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$.