1. Resoleu una de les dues qüestions següents:

(A) Trobeu tots els valors $x \in \mathbb{R}$ tals que el determinant següent val zero:
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix}.$$

(B) Calculeu el valor del determinant de la matriu ampliada del sistema següent i deduïu-ne raonadament, sense fer cap més operació, el nombre de solucions del sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = 3 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = 6. \end{array}\right.$$

(A) Fem les substitucions $C_1 - C_4 \longrightarrow C_1, \quad C_2 - C_3 \longrightarrow C_2$.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = \frac{1}{1^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \\ x-1 & 1-x & x & 1 \\ 1-x & x-1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{(C_1 = -C_2)}{=} 0.$$

És a dir, per qualsevol nombre real x el determinant val zero.

(B) El determinant de la matriu $(A|B)$ ampliada és igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1^3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$
$$= \quad -4 - 8 - 15 + 2 - 5 - 48 = -78.$$

$(*)$ Hem fet $C_2 - C_1 \longrightarrow C_2, \quad C_3 - C_1 \longrightarrow C_3, \quad C_4 - C_1 \longrightarrow C_4$.

$(**)$ Hem desenvolupat per la primera fila.

Llavors, $\det(A|B) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{r}(A|B) = 4 \neq 3 \geq \mathrm{r}(A)$. Per tant, el sistema és incompatible.

2. Sigui el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & - & y & + & 3z & = a-1 \\ x & - & ay & + & z & = 1-a \\ 7x & - & 8y & + & 9z & = -1 \end{array}\right.$$
Discutiu el tipus de sistema que resulta per als diferents valors de $a \in \mathbb{R}$, i resoleu tots els casos compatibles.

$$\det(A) = -9a^2 - 7 - 24 + 21a + 8a + 9 = -9a^2 + 29a - 22.$$

Les arrels del determinant són $a = \dfrac{-29 \pm \sqrt{841 - 792}}{-18} = \dfrac{-29 \pm 7}{-18} = \begin{cases} 2 \\ 11/9. \end{cases}$

Discussió:

- $\boxed{a \neq 2 \text{ i } a \neq 11/9}$

$\det \mathrm{A} \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 3 = r(A|B) \Longleftrightarrow$ **Compatible determinat.**

- $\boxed{a = 2}$ Trobem un menor d'ordre 2 diferent de zero i les seves orles iguals a zero. Efectivament,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \ \det(A) = 0 \ \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & -8 & -1 \end{vmatrix} \overset{(C_3=C_1+C_2)}{=0} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 2 =$$

$r(A|B) < 3 \Longleftrightarrow$ **Compatible indeterminat, i grau d'indeterminació$= \mathbf{3 - 2 = 1}$.**

- $\boxed{a = 11/9}$ Passa el mateix que en el cas $a = 2$,

$$\begin{vmatrix} 11/9 & -1 \\ 1 & -11/9 \end{vmatrix} = -40/81 \neq 0, \ \det(A) = 0 \ \text{ i } \begin{vmatrix} 11/9 & -1 & 2/9 \\ 1 & -11/9 & -2/9 \\ 7 & -8 & -1 \end{vmatrix} \overset{(C_3=C_1+C_2)}{=0} \Longleftrightarrow$$

$\mathrm{r}(A) = 2 = r(A|B) < 3 \Longleftrightarrow$ **Compatible indeterminat, i grau d'indeterminació$= \mathbf{3 - 2 = 1}$.**

Resolució

- $\boxed{a \neq 2 \text{ i } a \neq 11/9}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 3 \\ 1-a & -a & 1 \\ -1 & -8 & 9 \end{vmatrix}}{\det(A)} \overset{(C_1-C_2 \longrightarrow C_1)}{=} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & 3 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 7 & -1 & 9 \end{vmatrix}}{\det(A)} \overset{(C_2-C_1 \longrightarrow C_2)}{=} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1 \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a-1 \\ 1 & -a & 1-a \\ 7 & -8 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \overset{(C_1+C_2=C_3)}{=} \frac{0}{\det(A)} = 0 \end{aligned}$$

- $\boxed{a = 2}$ En ser les dues primeres columnes independents, considerem $z = \lambda$.

$$z = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 - 3\lambda \\ x - 2y = -1 - \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-3\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = 1 - \dfrac{5\lambda}{3} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3\lambda \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}}{-3} = 1 - \dfrac{\lambda}{3}\,. \end{cases}$$

- $\boxed{a = 11/9}$ Es resol igual i en resulta

$$z = \lambda, \ x = 1 - \frac{27\lambda}{5}, \ y = 1 - \frac{18\lambda}{5}\,.$$

3. Donada la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -13 & 10 & -9 \end{pmatrix}.$$
Raoneu si les seves files són linealment independents o no i, si hi ha dependència lineal, expresseu alguna fila com a combinació lineal de les altres dues.

La dependència lineal vindrà determinada pel rang de la matriu, el qual es pot estudiar fent transformacions de la matriu en altres de mateix rang. Concretament, es conserva el rang quan una fila és substituïda per una combinació lineal de files en què el coeficient de la fila substituïda és diferent de zero.

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -13 & 10 & -9 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} F_1 \\ 8F_2 - 5F_1 \\ 8F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -14 & 11 & -12 \\ 0 & -98 & 77 & -84 \end{pmatrix}.$$

S'observa que la tercera fila és igual a 7 vegades la segona i que les dues primeres són independents. Per tant, el rang és 2 i les 3 files de la primera matriu són $\boxed{\text{linealment dependents}}$. La relació de dependència d'aquestes files l'obtenim de la segona matriu.

$$8F_3 - 3F_1 = 7(8F_2 - 5F_1) \Longleftrightarrow 32F_1 - 56F_2 + 8F_3 = 0 \Longleftrightarrow F_3 = -4F_1 + 7F_2.$$

4. Resoleu una de les dues qüestions següents:

(A) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculeu la matriu X tal que $A \cdot X + B = 0$.

(B) Siguin
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \in \mathbb{R} \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = q \in \mathbb{R}\,.$$
Raoneu la relació entre p i q.

(A) L'àlgebra de les operacions suma i producte de matrius ens permet observar que,
$$AX + B = 0 \Longleftrightarrow AX = -B \Longleftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longleftrightarrow X = A^{-1}(-B).$$
Per tant, el problema es redueix a calcular la inversa d'A i fer-ne el producte per $(-B)$. Utilitzem el mètode que es deriva de resoldre dos sistemes d'equacions simultàniament pel mètode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Finalment, $\quad X = A^{-1} \cdot (-B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

(B) Cal observar que si el primer determinant té les files F_1, F_2 i F_3, el segon determinant resulta de substituir

– F_2 per $b_2F_1 - b_1F_2$,

– F_3 per $b_3F_1 - b_1F_3$.

Per tant, $p = \dfrac{1}{(-b_1)^2} \cdot q$, és a dir $\boxed{b_1^2 \cdot p = q}$.