IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT BC — 22/X/2004
Funcions – I — (2.25+0.75+1)+(1.5+1+1+1+1.5)

1. Considereu la funció $f(x) = x^4 - 23x^3 + 160x^2 - 300x$.

a) Calculeu $f'(x)$, estudieu el signe de la derivada i trobeu els intervals de creixement, decreixement de f i els seus punts extrems (màxims o mínims locals).

b) Trobeu els punts en què el gràfic de f talla els eixos i calculeu $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) A partir de la informació recollida en els apartats anteriors, representeu la funció f gràficament.

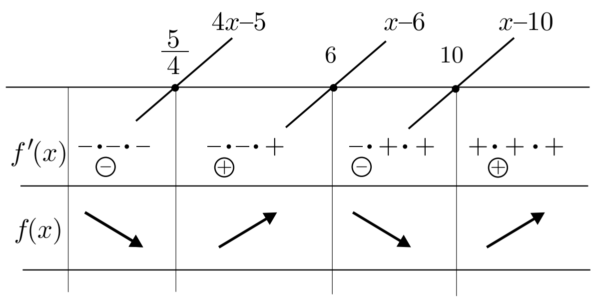
Indicació: En les descomposicions factorials proveu l'arrel $x = 10$.

a) $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 69x^2 + 320x - 300}$. Per estudiar el signe de la derivada, trobem la descomposició factorial de $f'(x)$ amb l'ajut de la regla de Ruffini:

	4	−69	320	−300
10		40	−290	300
	4	−29	30	0
6		24	−30	
	4	−5	0	

$$\Longrightarrow f'(x) = (x-10)(x-6)(4x-5).$$

Conseqüentment, els punts en què la derivada val 0 són $x = 10$, $x = 6$ i $x = \frac{5}{4}$. Aquests punts són possibles extrems locals de la funció i determinen els intervals de monotonia que trobarem mitjançant l'estudi gràfic del signe dels factors de la derivada.



És a dir que la funció és
$$\begin{cases} \text{Monòtona creixent en } \left(\frac{5}{4}, 6\right) \cup (10, +\infty). \\ \text{Monòtona decreixent en } \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup (6, 10). \end{cases}$$

i presenta
$$\begin{cases} \text{Mínims locals en } \begin{cases} \left(\frac{5}{4}, f\left(\frac{5}{4}\right) \approx -167.48\right), \\ (10, f(10) \approx 0). \end{cases} \\ \text{Màxim local en } (6, f(6) = 288). \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{23}{x} - \frac{160}{x^2} - \frac{300}{x^3}\right) = (+\infty)\cdot 1 = \boxed{+\infty}$.

Talls amb l'eix d'abscisses:

$$f(x) = 0 \iff x(x^3 - 23x^2 + 160x - 300) = 0 \iff x = 0 \text{ o bé } x^3 - 23x^2 + 160x - 300 = 0.$$

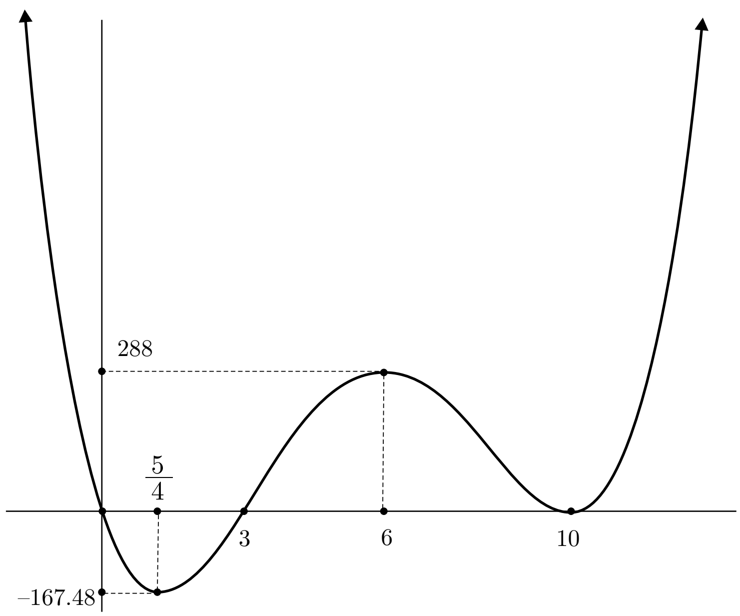
Cerquem les arrels de l'última equació amb la regla de Ruffini i l'algoritme de resolució de l'equació de segon grau:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -23 & 160 & -300 \\ 10 & & 10 & -130 & 300 \\ \hline & 1 & -13 & 30 & 0 \end{array} \implies x = 10 \ \text{ o bé } \ x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{2} = \frac{13\pm 7}{2} = \begin{cases} 10 \\ 3. \end{cases}$$

Els punts de tall són $\boxed{(0,0),(3,0),(10,0)}$.

L'únic tall amb l'eix d'ordenades és $\boxed{(0, f(0)=0)}$.

c) De tota la informació recollida en resulta el gràfic següent:



2. Considereu la funció $\quad f(x) = \dfrac{2}{x-3}$.

a) Utilitzeu la definició de derivada per demostrar que

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2}\,.$$

b) Trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic de f en el punt d'abscissa $x = 2$.

c) Calculeu $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

d) Estudieu el signe de $f'(x)$ i trobeu els intervals de monotonia de la funció f.

e) A partir de la informació recollida en els apartats anteriors, representeu gràficament la funció f i la recta tangent trobada.

a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{x+h-3}-\dfrac{2}{x-3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2x-6-2x-2h+6}{h(x+h-3)(x-3)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(x+h-3)(x-3)} = \boxed{\frac{-2}{(x-3)^2}}. \end{aligned}$$

b) La recta cercada és $y = mx + b$, la qual passa pel punt $\left(2, f(2) = \dfrac{2}{2-3} = -2\right)$, i el pendent m és igual a $f'(2) = \dfrac{-2}{(2-3)^2} = -2$. Llavors,

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ -2 = -2\cdot 2 + b \end{array}\right\} \Longrightarrow b = 4 - 2 = 2 \Longrightarrow \boxed{y = -2x + 2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = \boxed{-\infty}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = \boxed{+\infty}$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \dfrac{2}{\pm\infty} = \boxed{0}$.

d) $\left\{\begin{array}{l} -2 < 0 \\ (x-3)^2 > 0, \text{ si } x \neq 3 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \frac{-}{+} < 0, \ \forall x \neq 3.$

O sigui que $f(x)$ és monòtona decreixent a $\boxed{(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)}$.

e) De la informació recollida obtenim i del tall $\left(0, f(0) = -\frac{2}{3}\right)$, amb l'eix OY, obtenim: