1. Sigui el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x + 2y - 2az = 4 \\ ax - y - 9z = 13 \end{cases}$$

a) Discutiu el tipus de sistema que resulta per als diferents valors de $a \in \mathbb{R}$.

b) Cerqueu les solucions del cas compatible indeterminat.

a) Treballem amb les matrius A del sistema i $A|B$ ampliada. Apliquem el mètode de Gauss pivotant sobre els coeficients emmarcats per obtenir sistemes equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2a & 4 \\ a & -1 & -9 & 13 \end{array}\right) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -4a+9 & -7 \\ 0 & -2-a & -18+3a & 26-5a \end{array}\right)$$

$$\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4a+9 & -7 \\ 0 & 0 & -4a^2+4a & 12-12a \end{array}\right).$$

Substitucions: (Les files F_i fan referència a les del sistema immediatament anterior.)

$(*)\begin{cases} 2F_2 - 3F_1 \longrightarrow F_2 \\ 2F_3 - aF_1 \longrightarrow F_3 \end{cases}$

$(**)\quad 1F_3 - (-2-a)F_2 \longrightarrow F_3$

De l'observació que el nombre de files en les matrius esglaonades obtingudes per als diferents valors d'a, és el valor del rang de les matrius, en resulten els casos següents:

- $r(A) < 3 \iff -4a^2+4a = 0 \iff -4a(a-1) = 0 \iff a = 0$ o $a = 1$
- $r(A) = 3 \iff -4a^2+4a \neq 0 \iff a \neq 0$ i $a \neq 1$

Llavors, a partir d'aquests resultats i que,

- la condició necessària i suficient de compatibilitat és la igualtat de rangs entre les matrius del sistema i l'ampliada,
- la solució és única si el rang és igual al nombre d'incògnites,
- existeixen infinites solucions si el rang és més petit que el nombre d'incògnites,

obtenim:

- $\boxed{a \neq 0 \text{ i } a \neq 1} \iff r(A) = r(A|B) = 3 \iff \boxed{\text{Compatible determinat}}$.
- $\boxed{a = 0} \iff r(A) < 3$ i $r(A|B) = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 3 \iff \boxed{\text{Incompatible}}$.
- $\boxed{a = 1} \iff \begin{cases} r(A|B) = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} = 2 \\ r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$

$\iff \boxed{\text{Compatible indeterminat, amb grau d'indeterminació } 3-2=1}$.

b) Es tracta de trobar les solucions del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right)$. Si considerem $z = \lambda \in \mathbb{R}$ la variable lliure, tenim

$$\left\{\begin{array}{l} z = \lambda \\ y = -7 - 5\lambda \\ x = \frac{1}{2}\left(5 + 3\lambda + 7 + 5\lambda\right) = 6 + 4\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \lambda \\ y = -7 - 5\lambda \\ x = 6 + 4\lambda \end{array}}.$$

2. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & 6 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu el seu rang de manera raonada.

b) Raoneu si les seves files són linealment independents o no i, si hi ha dependència lineal entre elles, expresseu alguna fila com a combinació lineal de les altres dues.

a) Aplicarem les propietats següents:

- El rang d'una matriu i el d'una altra matriu obtinguda de la primera, mitjançant la substitució d'una fila per una combinació lineal de files tal que el coeficient de la fila substituïda és diferent de zero, són iguals.
- El rang d'una matriu en què una fila és combinació lineal de les altres, és igual al rang de la matriu en què s'ha eliminat aquesta fila.
- El rang d'una matriu esglaonada és igual al nombre de files de la matriu.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} F_1 & \boxed{3} & 1 & -2 & 3 \\ F_2 & 8 & 6 & 3 & -2 \\ F_3 & 4 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c|cccc} F_1' & 3 & 1 & -2 & 3 \\ F_2' & 0 & \boxed{10} & 25 & -30 \\ F_3' & 0 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c|cccc} F_1' & 3 & 1 & -2 & 3 \\ F_2' & 0 & 10 & 25 & -30 \end{array}\right)$$

Substitucions:

$$(*) \left\{\begin{array}{l} F_1 = F_1' \\ 3F_2 - 8F_1 = F_2' \\ 3F_3 - 4F_1 = F_3' \end{array}\right.$$

$$(**) \quad F_2' - 5F_3' = \overline{0}$$

Per tant, en la matriu inicial, $\boxed{\text{el rang és 2}}$.

b) En ser el rang igual al nombre de files linealment independents, les tres files de la matriu inicial són linealment dependents i la seva relació de dependència l'obtenim de l'última etapa $(**)$ de l'apartat anterior:

$$\begin{aligned} F_2' - 5F_3' = \overline{0} \iff & 3F_2 - 8F_1 - 5(3F_3 - 4F_1) = \overline{0} \iff 12F_1 + 3F_2 - 15F_3 = \overline{0} \\ \iff & \boxed{4F_1 + F_2 - 5F_3 = \overline{0} \iff F_2 = -4F_1 + 5F_3}. \end{aligned}$$

3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu:

a) Les matrius A^2 i A^{-1}.

b) La matriu X tal que $A \cdot X + B = C$.

a) Apliquem la regla del producte per al càlcul d'A^2 i, per al càlcul d'A^{-1}, el mètode de Gauss sobre el sistema que resulta d'imposar la condició $A \cdot A^{-1} = Id_2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-12 & -3-3 \\ 4+4 & -12+1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1}: \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 13 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}}.$$

Substitucions:

$$(1): \; -4F_1 + F_2 \longrightarrow F_2, \qquad (2): \; 13F_1 + 3F_2 \longrightarrow F_1, \qquad (3): \; \begin{cases} \frac{1}{13} F_1 \longrightarrow F_1 \\ \frac{1}{13} F_2 \longrightarrow F_2 \end{cases}$$

b) A partir de l'àlgebra de matrius obtenim

$$AX + B = C \iff AX = C - B \iff A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \iff X = A^{-1}(C - B)$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}}.$$