IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 2n BAT CCSS 21/X/2005
Funcions – I $(1.5+2)+(1.5+2)+(1.5+1.5)$

1. Considereu la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 32$.

a) Trobeu la descomposició factorial del polinomi que determina $f(x)$.

b) Estudieu el signe de la funció mitjançant els gràfics de rectes i/o paràboles determinades pels seus factors.

a) Utilitzem la regla de Ruffini per trobar els factors:

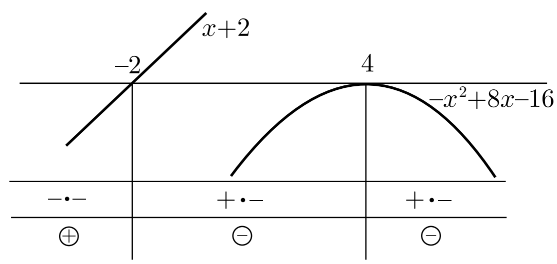
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ -2 & & 2 & -16 & 32 \\ \hline & -1 & 8 & -16 & 0 \\ -4 & & -4 & 16 & \\ \hline & -1 & 4 & & \end{array}$$

En resulta la descomposició

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 &= (x+2)(-x^2+8x-16) \\ &= \boxed{(x+2)(x-4)(4-x)}. \end{aligned}$$

b) Estudiem el signe del polinomi a partir dels gràfics generats per la seva primera descomposició factorial i obtenim.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -2) \\ f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, -4) \cup (4, +\infty) \\ f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \quad \text{o} \quad x = 4 \end{array}}$$



2. Considereu les funcions: $\quad f(x) = \sqrt{x-4} \quad$ i $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Trobeu l'expressió analítica de $(f \circ g)(x)$ i el domini de $f \circ g$.

b) Trobeu l'expressió analítica de $f^{-1}(x)$, —inversa de f—. Comproveu que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i $(f \circ f^{-1})(x) = x$, i representeu f i f^{-1} gràficament.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \boxed{\sqrt{\dfrac{1}{x} - 4}}$.

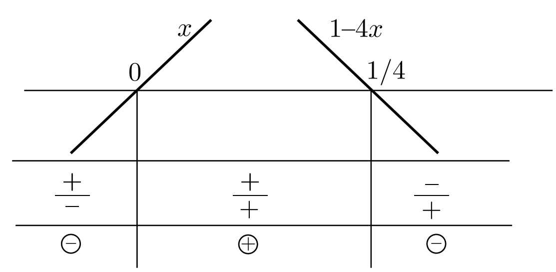
- Llavors, si $x \in \mathrm{Dom}(f \circ g)$, tenim

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{x} - 4 \geq 0 \\ \text{i} \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccc} x > 0 & \text{i} & x \leq \dfrac{1}{4} \\ & \text{o} & \\ x < 0 & \text{i} & x \geq \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x \in \left(0\,,\ \dfrac{1}{4}\right]}$$

- Una altra manera de trobar el domini parteix de

$$\frac{1}{x} - 4 = \frac{1-4x}{x} \geq 0 \quad \text{i} \quad x \neq 0.$$

Llavors, de la lectura de l'esquema gràfic adjunt en resulta la mateixa solució.

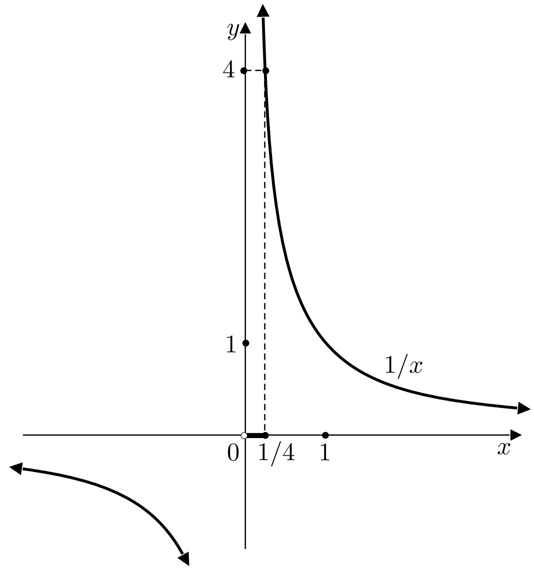


- Finalment, encara podríem obtenir el domini amb l'ajut del gràfic de la funció de proporcionalitat inversa $y = \dfrac{1}{x}$.

Efectivament, els $x > 0$ tals que $\dfrac{1}{x} - 4 > 0$ satisfan

$$x > 0 \quad \text{tals que} \quad \frac{1}{x} \geq 4.$$

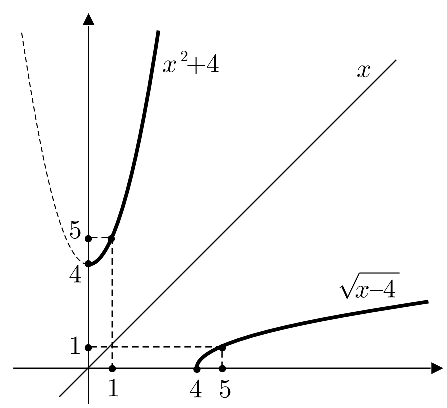
Llavors, observem en el gràfic, que constitueixen l'interval $\left(0\,,\,\dfrac{1}{4}\right]$.



b) $f(x) = \sqrt{x-4} \Longrightarrow x = \sqrt{f^{-1}(x) - 4} \Longrightarrow x^2 = f^{-1}(x) - 4 \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = x^2 + 4}$.

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\sqrt{x-4}\right) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 4 = x - 4 + 4 = x.\\ \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(x^2+4\right) = \sqrt{(x^2+4)-4} = \sqrt{x^2} = x.\end{aligned}$$

En ser $f(x) \geq 0$, el domini de $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ està format pels $x \geq 0$. Per tant, el gràfic de f^{-1} està constituït pels punts, d'abscissa $x \geq 0$, de la paràbola de vèrtex $(0,4)$ que passa pel punt $(1,5)$. Llavors, per traçar el gràfic de f només cal traçar el gràfic simètric de f^{-1} respecte de la bisectriu del primer quadrant.



3. L'evolució d'ingressos diaris en euros, durant 200 dies, obtinguts per la venda d'un producte en dues grans superfícies **A** i **B** ve descrit d'una manera força aproximada per les funcions

$$A(x) = -x^2 + 398x + 800 \qquad \text{i} \qquad B(x) = 253x + 50,$$

en què la variable x recorre els dies des de l'1 fins el 200.

a) Representeu gràficament les dues funcions, —sobre els mateixos eixos—, a partir del càlcul dels talls amb els eixos de coordenades i del vèrtex de la paràbola determinada per $A(x)$.

b) La diferència dels ingressos en un mateix dia ve donada per la funció

$$D(x) = A(x) - B(x).$$

Representeu gràficament $D(x)$, observeu el gràfic i deduïu-ne el dia en què aquesta diferència és màxima.

a)

- $\boxed{\text{Funció } A(x)}$ Talls OX: Són els punts $\boxed{(-2,0) \text{ i } (400,0)}$ perquè $A(x) = 0$ equival a

$$-x^2 + 398x + 800 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-199 \pm \sqrt{199^2 + 800}}{-1} = \frac{-199 \pm 201}{-1} = \begin{cases} 400 \\ -2 \end{cases}$$

Tall OY: És el punt $\boxed{(0,800)}$ perquè $A(0)=0+0+800=800$.

Vèrtex: És el punt $\boxed{(199,40401)}$ perquè

$$x_V=-\frac{398}{2\cdot(-1)}=199 \quad \text{i} \quad y_V=A(199)=-199^2+398\cdot 199+800=40401.$$

- $\boxed{\text{Funció } B(x)}$ Tall OX: És el punt $\boxed{(-50/253,0)}$ perquè

$$B(x)=0 \Longleftrightarrow 253x+50=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{50}{253}.$$

Tall OY: És el punt $\boxed{(0,50)}$ perquè $B(0)=0+50=50$.

- $\boxed{A(x)=B(x)}$ Això ens proporcionarà els punts on es tallen els dos gràfics:

$$\begin{aligned}
A(x)=B(x) &\Longleftrightarrow A(x)-B(x)=0 \Longleftrightarrow -x^2+145x+750=0\\
&\Longleftrightarrow x=\frac{-145\pm\sqrt{21025+3000}}{-2}=\frac{-145\pm 155}{-2}= \begin{cases} -5\\ 150\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} B(-5)=-1215\\ B(150)=38000.\end{cases}
\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Imatges en els extrems de } [1,200]}$

$$A(1)=1197,\ A(200)=40400,\ B(1)=303,\ B(200)=50650.$$

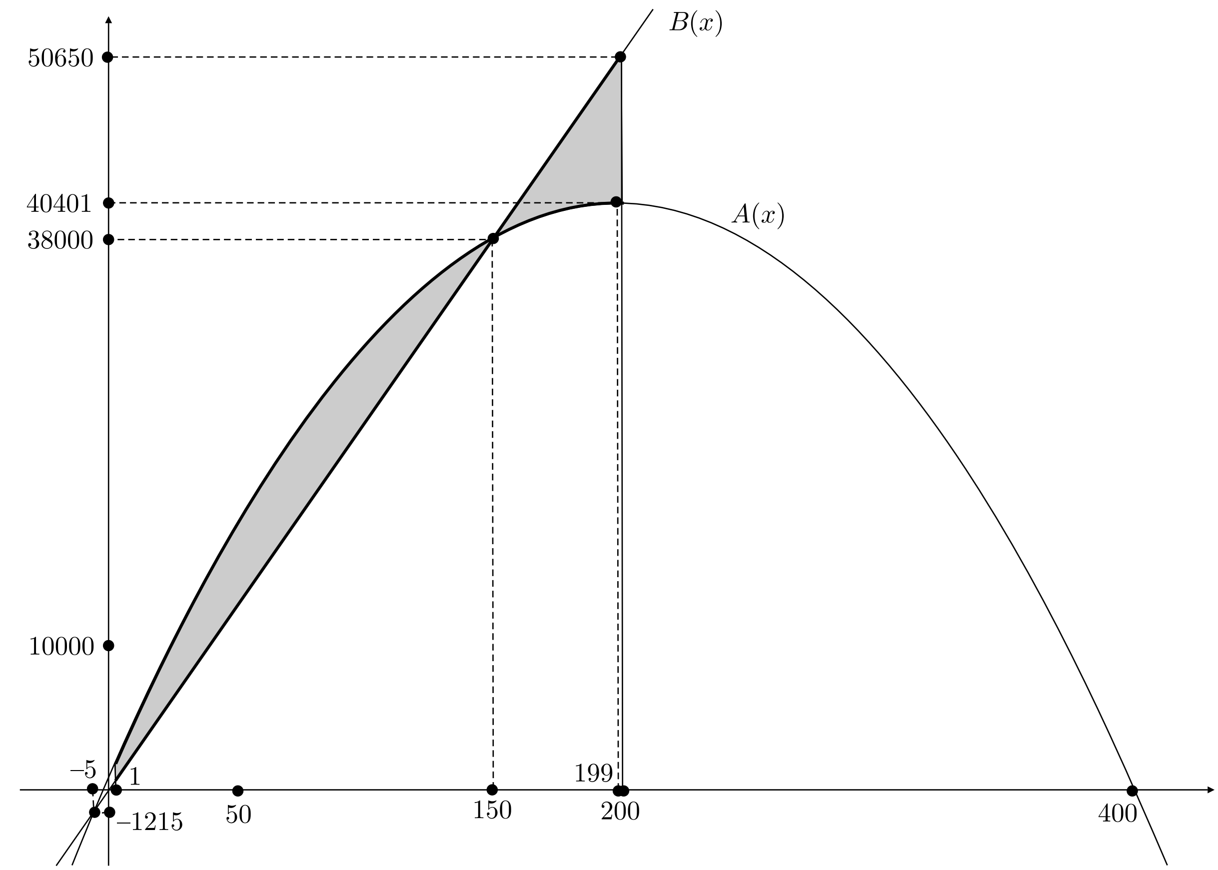
b) $D(x)=A(x)-B(x)=-x^2+145x+750$ es representa amb una paràbola. Pels càlculs que hem fet anteriorment, talla l'eix OX en els punts $x=-5$ i $x=150$. Per tant, el seu vèrtex té coordenades

$$x_V=\frac{-5+150}{2}=72.5 \quad \text{i} \quad y_V=-72.5^2+145\cdot 72.5+750=6006.25.$$

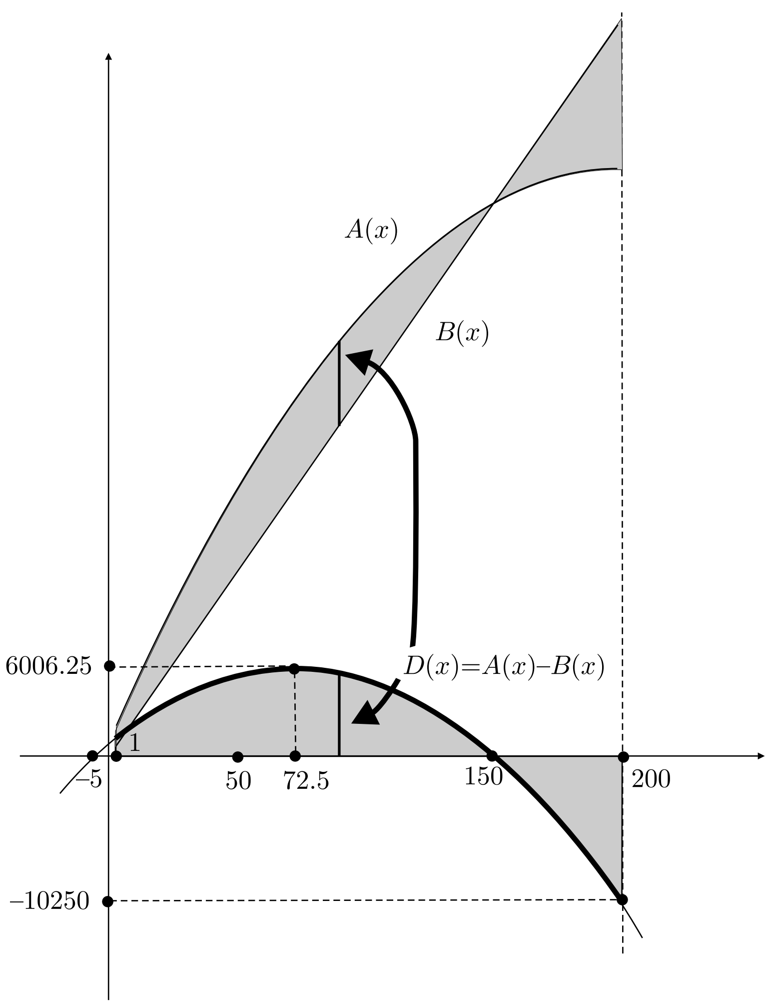
Si observem el gràfic de $D(x)$ que adjuntem, a l'interval $[1,200]$ veiem que les diferències d'ingressos màximes s'obtenen

$$\begin{array}{ll} \text{Per a } x<150: & \text{en } x=72.5,\ D(72.5)=6006.25\\ \text{Per a } x>150: & \text{en } x=200,\ D(200)=-10250\end{array}$$

Per tant, abans del dia 150 la màxima diferència d'ingressos s'obtenen els dies 72 i 73 en què la gran superfície **A** ingressa $D(72)=D(73)=6600$ euros més que la **B**. Però en el total de 200 dies, la màxima diferència es produeix el dia 200 en què la gran superfície **B** ingressa 10250 euros més la gran superfície **A**.



$B(x)$
50650
40401
38000
$A(x)$
10000
-5
1
-1215
50
150
199
200
400



$A(x)$
$B(x)$
6006.25
$D(x)=A(x)-B(x)$
1
-5
50
72.5
150
200
-10250