**1.** Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{1-x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2}{x^2-x}-\dfrac{x^3+5x^2-12}{x^2-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-\sqrt{3x}}{x^2-9}$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{1-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}=\text{Indeterminat}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{1-x}=\left(\frac{2+0}{1+0}\right)^{1-\infty}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=\boxed{0}.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x^2}{x^2-x}-\frac{x^3+5x^2-12}{x^2-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminat}$$

Restem les fraccions tenint en compte que m.c.m.$(x^2-x,x^2-1)=x(x-1)(x+1)$. Llavors,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+x^2)(x+1)-(x^3+5x^2-12)x}{(x-1)(x+1)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x^3+x^2-x^4-5x^3+12x}{x^3-x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x^2+12x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{-3+0+0}{1-0}=\frac{-3}{1}=\boxed{-3}.$$

c) $$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{x^2-9}=\frac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{Indeterminat}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{x^2-9}\cdot\frac{x+\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{(x^2-9)\left(x+\sqrt{3x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(x+\sqrt{3x}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{(x+3)\left(x+\sqrt{3x}\right)}=\frac{3}{6\cdot(3+3)}=\boxed{\frac{1}{12}}.$$

**2.** Sigui $f(x)=1+\sqrt{x}$. Trobeu:

a) $f'(x)$, utilitzant la definició de derivada.

b) $f'(x)$, utilitzant les regles de derivació.

c) $f^{-1}(x)$, comproveu que $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$ i $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x$ i representeu $f$ i $f^{-1}$ gràficament.

a) De la definició de derivada obtenim

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{x+h}-(1+\sqrt{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{Indeterminat}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

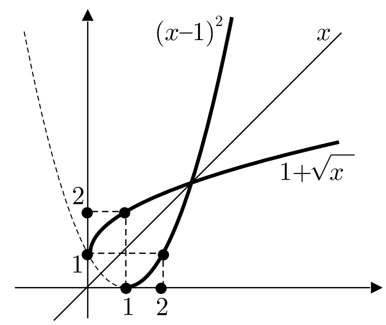
b) Des de la regla de la derivació de la suma de funcions derivables i la de la funció potencial,

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{2}\,x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

c) $f(x) = 1 + \sqrt{x} \Longrightarrow x = 1 + \sqrt{f^{-1}(x)} \Longrightarrow (x-1)^2 = f^{-1}(x) \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = (x-1)^2}$.

- $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) \;=\; f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(1+\sqrt{x}\right) = \left(\left(1+\sqrt{x}\right)-1\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$
- $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) \;=\; f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left((x-1)^2\right) = 1 + \sqrt{(x-1)^2} = 1 + (x-1) = x.$

En ser $f(x) \geq 1$, el domini de $f^{-1}(x) = (x-1)^2$ està format pels $x \geq 1$. Per tant, el gràfic de $f^{-1}$ està constituït pels punts, d'abscissa $x \geq 1$, de la paràbola de vèrtex $(1,0)$ que passa pel punt $(2,1)$. Llavors, per traçar el gràfic de $f$ només cal traçar el gràfic simètric de $f^{-1}$ respecte de la bisectriu del primer quadrant.




**3.** Considereu la funció $f(x) = x^3 - x + 6$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Estudieu el signe de $f$ (amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles determinats pels seus factors).

c) Estudieu el signe de $f'$ (amb el mateix procediment que abans). Deduïu-ne els intervals de monotonia i els màxims i mínims locals.

a) L'equació de la recta tangent és en el punt d'abscissa $x = 0$ és $y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Llavors, en ser

$$f(0) = 0^3 - 0 + 6 = 6, \;\; f'(x) = 3x^2 - 1 \quad \text{i} \quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1,$$

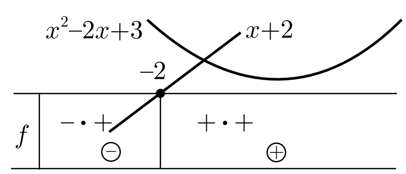
obtenim $\quad y - 6 = (-1)(x-0)$, és a dir $\boxed{y = -x + 6}$.

b) Utilitzem la regla de Ruffini per trobar els factors:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

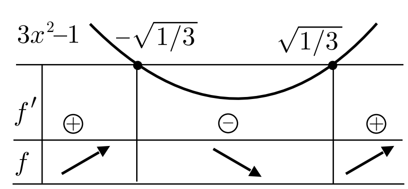
En resulta la descomposició $\qquad x^3 - x + 6 = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$

El discriminant del segon factor és $(-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$. Per tant, no té arrels i el seu gràfic és una paràbola que no talla l'eix $OX$ amb les branques amunt. En resulta,




$$\boxed{f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -2), \quad f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, +\infty)}$$

c) Tenim $f'(x) = 3x^2 - 1$. El seu signe s'estudia a partir del gràfic de la paràbola $y = 3x^2 - 1$, el qual talla l'eix $OX$ en $x = -1/\sqrt{3}$ i $x = 1/\sqrt{3}$ i té les branques amunt. D'aquest signe en deduïm la monotonia i els màxims i mínims locals.




$f$ creix en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $\quad f$ decreix en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f$ té un màxim local en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ , $\quad f$ té un mínim local en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**4.** Partim en dos trossos un filferro de 40 cm de longitud. Construïm els perímetres de dos quadrats amb els dos trossos resultants.

a) Justifiqueu que la suma $S(x)$ de les àrees dels quadrats ve descrita per la funció

$$S(x) = \frac{1}{8}x^2 - 5x + 100,$$

en què $x$ és la longitud d'un dels dos trossos de filferro resultants.

b) Dibuixeu el gràfic de $S(x)$ per als valors de $x$ admissibles i calculeu les mesures de cada tros de filferro de manera que $S(x)$ sigui mínima. Amb quines mesures dels dos trossos seria $S(x)$ màxima.

a) Un quadrat es construeix amb el tros de longitud $x$. Per tant, el seu costat mesura $\dfrac{x}{4}$.

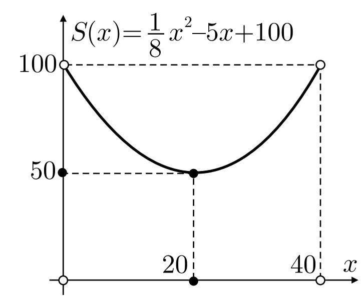
L'altre quadrat es construeix amb el tros de longitud $40 - x$ i el seu costat mesurarà $\dfrac{40-x}{4}$.

Calculem les àrees elevant al quadrat aquests dos valors. Així la seva suma és

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{40-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{1600-80x+x^2}{16} \\ &= \frac{2x^2-80x+1600}{16} = \frac{1}{8}x^2 - 5x + 100. \end{aligned}$$

b) Els valors admissibles són els de l'interval $0 < x < 40$. El gràfic de $S(x)$ és una paràbola amb les branques amunt, perquè el coeficient de la part quadràtica és positiu. A més, no talla l'eix $OX$ perquè el discriminant de $S(x) = 0$ és $(-5)^2 - 4\cdot\frac{1}{8}\cdot 100 = 25 - 50 = -25 < 0$. El seu vèrtex es troba en el punt de coordenades

$$x_v = -\frac{-5}{2/8} = 20, \qquad y_v = S(20) = 50.$$




Talla l'eix $OY$ en $(0, S(0)) = (0, 100)$. Per tant, tenim la suma d'àrees mínima, representada pel vèrtex, quan els trossos mesuren

$$\boxed{x = 20 \text{ cm}, \quad 40 - x = 40 - 20 = 20 \text{ cm} \quad \text{i el valor de la suma és} \quad S(20) = 50 \text{ cm}^2}.$$

L'àrea màxima es donaria en els extrems de l'interval $(0, 40)$, però els valors $x = 0$ i $x = 40$ no són admissibles perquè no resultarien dos trossos i, per tant, dos quadrats, sinó que només n'hi hauria un. L'únic que es pot dir és que la suma sempre es manté menor a $S(0) = S(40) = 100$ cm$^2$ i es poden obtenir valors tan propers com es vulguin a $S(0)$.