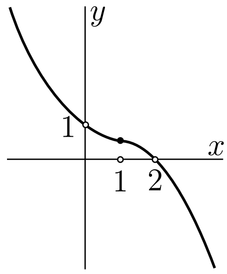
1. Sigui la funció $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$
Trobeu el valor a que fa la funció f contínua i representeu f gràficament.

Aquestes funcions són contínues en tots els punts dels seus dominis amb excepció de la frontera, $x=1$, on s'ha d'imposar la continuïtat. Observem que,



$$f(1)=e^a=\lim_{x\to 1^-} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=1-\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Llavors, f contínua en $x=1 \iff e^a=\dfrac{1}{2} \iff \boxed{a=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2}$.

2. Sigui la funció $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$. Trobeu

a) El seu domini.
b) La seva asímptota horitzontal.
c) La seva funció inversa
d) Dues funcions tal que la seva composició sigui f.
e) La seva funció derivada.

a) $\begin{cases} x+2\ge 0 \text{ i } x>0 \\ o \\ x+2\le 0 \text{ i } x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge -2 \text{ i } x>0 \\ o \\ x\le -2 \text{ i } x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ o \\ x\le -2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Dom} f = \\ (-\infty,-2]\cup(0,+\infty)\end{array}}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+2}{x}}=\sqrt{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}=\sqrt{1+0}=1 \Longrightarrow$ Asímptota horitzontal: $\boxed{y=1}$.

c) Si fem $y^{-1}=f^{-1}(x)$ obtenim,

$$x=\sqrt{\frac{y^{-1}+2}{y^{-1}}} \Longrightarrow x^2=\frac{y^{-1}+2}{y^{-1}} \Longrightarrow y^{-1}(x^2-1)=2 \Longrightarrow \boxed{y^{-1}=\frac{2}{x^2-1}\,,\ \text{on } x\ge 0}.$$

d) Les funcions són $g_1(x)=\dfrac{x+2}{x}$ i $g_2(x)=\sqrt{x}$, perquè

$$(g_2\circ g_1)(x)=g_2(g_1(x))=g_2\left(\frac{x+2}{x}\right)=\sqrt{\frac{x+2}{x}}.$$

e) $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}\cdot\frac{1\cdot x-1\cdot(x+2)}{x^2}=\boxed{-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x+2}}}.$$

3. Justifiqueu, utilitzant la definició de derivada, que $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2 + 3xh + h^2)\, h}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2. \end{aligned}$$

4. Sigui la funció $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 15x$.

a) Trobeu les equacions de les rectes tangents al seu gràfic, paral·leles a la recta d'equació $x + y = 0$.

b) [**Opcional**]. Esbrineu si les rectes tangents que heu trobat tallant el gràfic de f en algun altre punt.

a) Les rectes cercades han de tenir el mateix pendent que la recta $x + y = 0$, és a dir, el pendent ha de ser igual a -1. Llavors hem de trobar els punts x tals que $f'(x) = -1$.

$f'(x) = 8x^3 - 24x + 15 = -1 \Longleftrightarrow 8x^3 - 24x + 16 = 0$ i, amb la regla de Ruffini, s'obté l'arrel doble $x = 1$ i l'arrel simple $x = -2$.

Conseqüentment les rectes tangents són

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - 5 = -1(x-1) \Longleftrightarrow \boxed{y = -x + 6 \Longleftrightarrow x + y - 6 = 0}.$$

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \iff y + 46 = -1(x+2) \Longleftrightarrow \boxed{y = -x - 48 \Longleftrightarrow x + y + 48 = 0}.$$

b) • Talls amb la recta $y = -x + 6$:

$2x^4 - 12x^2 + 15x = -x + 6 \Longleftrightarrow 2x^4 - 12x^2 + 16x - 6 = 0$ i, amb la regla de Ruffini, s'obté l'arrel triple $x = 1$ i l'arrel simple $x = -3$. Per tant $\boxed{\text{la recta talla en el punt } (-3, f(-3)) = 9}$.

• Talls amb la recta $y = -x - 48$:

$2x^4 - 12x^2 + 15x = -x - 48 \Longleftrightarrow 2x^4 - 12x^2 + 16x + 48 = 0$ i, amb la regla de Ruffini, només s'obté l'arrel doble $x = -2$ i la descomposició $2x^4 - 12x^2 + 16x + 48 = 2(x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$. Com que $x^2 - 4x + 6$ no té arrels reals, $\boxed{\text{la recta no talla en cap punt}}$.

5. Trobeu el màxim i mínim absoluts en l'interval $[-4, 1]$ de la funció

$$f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 140x^3 - 30x^2 + 360x.$$

En ser f una funció polinòmica, és contínua en $[-4, 1]$ i derivable en els punts interiors d'aquest interval. Per tant, existeixen extrems absoluts i els punts candidats a ser-ho són els punts x tals que $f'(x) = 0$ i els extrems de l'interval, $x = -4$, $x = 1$.

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 60x^4 + 60x^3 - 420x^2 - 60x + 360 = 0 \Longleftrightarrow x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0.$$

Si apliquem la regla de Ruffini per trobar les arrels, en resulten $\{-3, -1, 1, 2\}$. Per tant els punts candidats són $\{-4, -3, -1, 1\}$. Ara només caldrà calcular les seves imatges i obtindrem els extrems absoluts i els seus valors.

$$\left.\begin{array}{l} f(-4) = -1408 \\ f(-3) = 729 \\ f(-1) = -247 \\ f(1) = 104 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Mínim absolut:} \\ \quad x = -4 \\ \quad f(-4) = -1408. \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{Màxim absolut:} \\ \quad x = -3 \\ \quad f(-3) = 729. \end{array}}$$

6. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}$

a) Trobeu-ne les asímptotes mitjançant el càlcul de límits.

b) Sabem que $f'(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3}$ i $f''(x) = \dfrac{6 - 2x}{x^4}$. Estudieu, mitjançant esquemes gràfics de rectes i/o paràboles, els signes de f' i f'' i utilitzeu-los per estudiar la monotonia i la concavitat de f. Trobeu les coordenades dels seus extrems locals i dels seus punts d'inflexió.

c) Representeu gràficament la funció f, a partir de la informació anterior i dels seus talls amb els eixos de coordenades.

a) **Asímptota vertical**: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \boxed{x = 0}$.

Asímptota horitzontal:
No n'hi ha perquè $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \pm\infty - 1 - 0 + 0 = \pm\infty.$

Asímptota oblíqua: És la recta $\boxed{y = x - 1}$ perquè,

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1 - 0 - 0 + 0 = 1. \\
b &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2 - x + 1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -1 - 0 + 0 = -1.
\end{aligned}$$

b) Si descomponem els polinomis en f' obtenim $f'(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.

De f' i de f'' en resulta l'estudi de signes i interpretació següents,

	x^2+x+2, x, $x-1$	0	1	
signe de $f'(x)$	$\frac{-\,+}{-}\ \oplus$		$\frac{-\,+}{+}\ \ominus$	$\frac{+\,+}{+}\ \oplus$
monotonia de $f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

	x^4, $6-2x$	0	3	
signe de $f''(x)$	$\frac{+}{+}\ \oplus$		$\frac{+}{+}\ \oplus$	$\frac{-}{+}\ \ominus$
concavitat de $f(x)$	$\cup$		$\cup$	$\cap$

D'on obtenim un mínim local en $(1, f(1) = 0)$, i un punt d'inflexió en $\left(3, f(3) = \frac{16}{9}\right)$.

c) De la informació anterior i dels talls del gràfic en els punts $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, —els quals s'obtenen de $f(x) = 0$ i aplicar la regla de Ruffini per obtenir les arrels de $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$—, en resulta el gràfic adjunt.