1. Ens diuen que el sistema en les incògnites x, y i z següent és compatible indeterminat. Trobeu-ne les solucions.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 1 \\ x + y + az = a + 1 \end{cases}$$

En aquest problema i en el següent, transformem el sistema en un d'equivalent mitjançant la substitució d'equacions per combinacions lineals d'equacions tals que el coeficient de l'equació substituïda sigui diferent de zero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+1 \end{array}\right) \overset{\substack{-1\cdot E_1 + 1\cdot E_2 \leftrightarrow E_2 \\ -1\cdot E_1 + 1\cdot E_3 \leftrightarrow E_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right).$$

– Quan $\boxed{2a - 1 = 0}$, tenim $a = \dfrac{1}{2}$ i el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$, perquè l'equació de coeficients igual zero és combinació lineal de les altres dues. Aquest últim sistema (si canviem l'ordre de les dues últimes incògnites) és triangular, per tant és compatible amb grau d'indeterminació $3 - 2 = 1$. Considerem el paràmetre $y = \alpha \in \mathbb{R}$ i obtenim $z = -1$, $x = 1 - \alpha - (-1) = 2 - \alpha$.

$$\boxed{\text{Solució: } x = 2 - \alpha,\ y = \alpha,\ z = -1, \text{ en què } \alpha \in \mathbb{R}}.$$

– Per saber si hi ha algun cas més d'indeterminació estudiem $\boxed{2a - 1 \neq 0}$.

- Si $a = 1$ el sistema és incompatible perquè l'última equació afirma que $0 = 1$ i això no pot ser.
- Si $a \neq 1$ i $a \neq 1/2$, el sistema és triangular amb grau d'indeterminació $3 - 3 = 0$, és a dir, compatible determinat, la qual cosa no satisfà la condició de l'enunciat.

2. Trobeu el valor de k perquè les rectes següents tinguin un sol punt en comú.

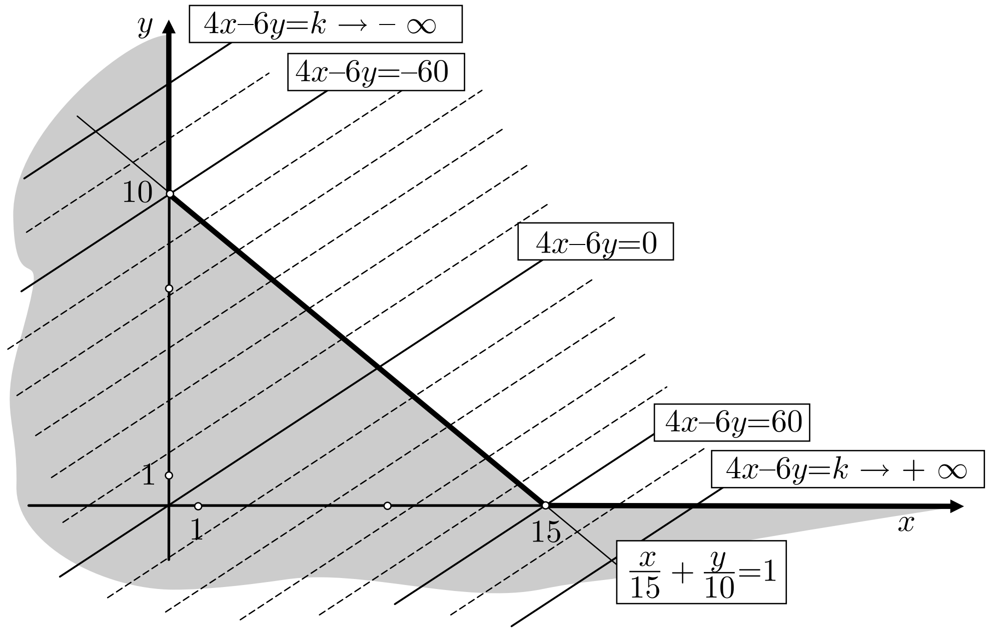
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 10y = k \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

La condició de l'enunciat equival a que el sistema és compatible determinat.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 10 & k \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{-2\cdot E_1 + 3\cdot E_2 \leftrightarrow E_2 \\ -1\cdot E_1 + 3\cdot E_3 \leftrightarrow E_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 28 & 3k-8 \\ 0 & -7 & 8 \end{array}\right) \overset{1\cdot E_2 + 4\cdot E_3 \leftrightarrow E_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 28 & 3k-8 \\ 0 & 0 & 3k+24 \end{array}\right).$$

La condició necessària i suficient perquè tingui solució única és que sigui equivalent al sistema que resulta d'imposar $3k + 24 = 0$, és a dir, $\boxed{k = -8}$. En resulta el punt d'intersecció únic $\left(\frac{12}{7}, -\frac{8}{7}\right)$.

3. Trobeu els valors màxim i mínim de la funció $F(x,y) = 4x - 6y$, en què el domini està sotmès a les restriccions $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{10} \geq 1. \end{cases}$



$\boxed{\text{No té màxim ni mínim}}$. Això es justifica a partir de l'observació que els valors de $4x - 6y$ per als punts (x, y) de la regió factible —regió dreta del gràfic—, s'obtenen del traçat de la família de rectes paral·leles $4x - 6y = k$. Els valors de k assolits per als punts (x, y) de la regió factible creixen sense cota, quan x creix, per a cada y constant. De la mateixa manera els valors de k assolits per als punts (x, y) de la regió factible decreixen sense cota inferior, quan y creix, per a cada x constant.

4. Una empresa de fabricació d'avions té tres fàbriques que han produït 7 unitats a Berlin, 10 a Oslo i 8 a Frankfurt. Han de distribuir-los de manera que 15 han de ser enviats a Madrid i 10 a Atenes. El quadre de despeses per unitat transportada és el següent

	Berlin	Oslo	Frankfurt
Madrid	7	10	3
Atenes	9	6	4

Calculeu la manera de distribuir el transport per tal que la despesa sigui mínima.

Construïm la taula de nombre d'unitats distribuïdes.

	Berlin	Oslo	Frankfurt
Madrid	x	y	$15 - x - y$
Atenes	$7 - x$	$10 - y$	$x + y - 7$

D'on obtenim les restriccions $\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ x + y \leq 15 \\ x + y \geq 7 \end{cases}$

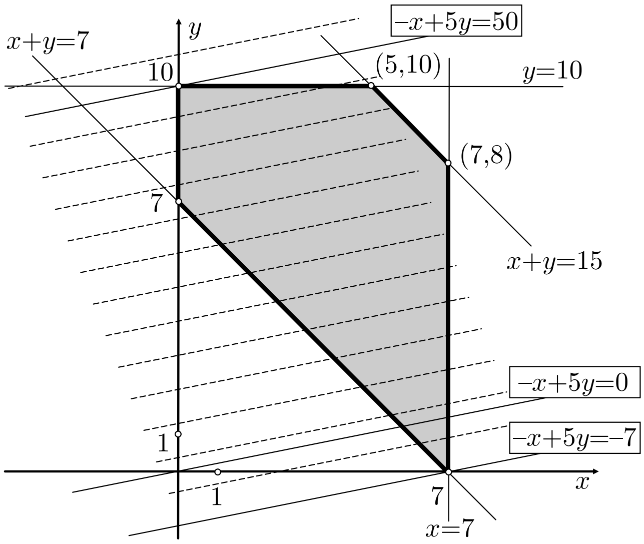
Les despeses de transport són,

$$7x + 9(7 - x) + 10y + 6(10 - y) + 3(15 - x - y) + 4(x + y - 7) = -x + 5y + 140.$$

Només caldrà calcular els valors x, y que minimitzen la funció $D(x,y) = -x + 5y$, perquè aquests valors es mantenen quan sumem una constant.

En ser la regió factible un recinte tancat el valor mínim de $D(x,y)$ s'assoleix en algun vèrtex del recinte. Construïm la taula de valors, i el trobem en $x = 7,\ y = 0$.

$D(x,y)$		Despesa $-x+5y+140$
$D(0,7) = 35$	$\Longrightarrow$	$35 + 140 = 175$
$D(0,10) = 50$	$\Longrightarrow$	$50 + 140 = 190$
$D(5,10) = 45$	$\Longrightarrow$	$45 + 140 = 185$
$D(7,8) = 33$	$\Longrightarrow$	$33 + 140 = 173$
$\boxed{D(7,0) = -7}$	$\Longrightarrow$	$\boxed{-7 + 140 = 133}$



D'on s'obté el transport òptim següent,

	Berlin	Oslo	Frankfurt
Madrid	7	0	8
Atenes	0	10	0

També es pot justificar la veritat de la solució mitjançant l'observació que els valors de $-x + 5y$ per als punts (x,y) de la regió factible s'obtenen del traçat de la família de rectes paral·leles $-x + 5y = k$. Efectivament, observem que el valor més petit $k = -7$ assolit per als punts de la regió s'obté en el punt $(7,0)$ el qual pertany a la recta $-x + 5y = -7$.