Observacions.

- En els problema de programació lineal heu de dibuixar la regió factible.
- Heu de raonar les diferents etapes del treball que feu sobre les qüestions proposades.

1. Discutiu i resoleu el sistema següent segons els diferents valors del paràmetre a.

$$\begin{cases} 2x+y-2z=3 \\ 3x-3y+az=4 \\ ax+5y-5z=2 \end{cases}$$

- **Discussió i resolució amb el mètode de Gauss.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & a & 4 \\ a & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{-3F_1+2F_2\longrightarrow F_2 \\ -aF_1+2F_3\longrightarrow F_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 2a+6 & -1 \\ 0 & 10-a & -10+2a & 4-3a \end{array}\right)$$

$$\overset{-(10-a)F_2-9F_3\longrightarrow F_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 2a+6 & -1 \\ 0 & 0 & 2a^2-32a+30 & 26a-26 \end{array}\right)$$

Estudi del rang de la matriu A del sistema. Cal diferenciar dos casos:

$$\text{— } r(A)\le 2 \iff 2a^2-32a+30=0 \iff a^2-16a+15=0$$

$$\iff a=\frac{8\pm\sqrt{64-15}}{1}=\frac{8\pm 7}{1}=\begin{cases}15\\1\end{cases} \iff a=15 \text{ o } a=1$$

$$\text{— } r(A)=3 \iff 2a^2-32a+30\neq 0 \iff a^2-16a+15\neq 0 \iff a\neq 1 \text{ i } a\neq 15$$

D'aquí en resulten tres casos:

$\boxed{a=15}$. Obtenim el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 36 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 364 \end{array}\right)$, en què $\boxed{r(A)=2\neq 3=r(A|B)}$.

$\boxed{a=1}$. Obtenim el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, en què $\boxed{r(A)=2=r(A|B)}$.

$\boxed{a\neq 15 \text{ i } a\neq 1}$. Obtenim el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 2a+6 & -1 \\ 0 & 0 & 2a^2-32a+30\neq 0 & 26a-26 \end{array}\right)$,

en què $\boxed{r(A)=3=r(A|B)}$.

Per tant,

$a=15 \iff$ Sistema incompatible
$a=1 \iff$ Sistema compatible indeterminat amb grau d'indetermiantició igual a 1
$a\neq 15$ i $a\neq 1 \iff$ Sistema compatible determinat.

Resolució.

$\boxed{a=1}$. Es pot agafar z com a paràmetre perquè $r\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = 2$. Llavors s'obté,

$$\boxed{z=\lambda\in\mathbb{R},\ y=\frac{1+8\lambda}{9},\ x=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1+8\lambda}{9}+2\lambda\right)=\frac{27-1-8\lambda+18\lambda}{2\cdot 9}=\frac{13+5\lambda}{9}}.$$

$\boxed{a\neq 1 \text{ i } a\neq 15}$. Sabem que $2a^2-32a+30=2(a-1)(a-15)$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{26(a-1)}{2(a-1)(a-15)} = \boxed{\frac{13}{a-15}} \\ y &= \frac{1}{-9}\left(-1-\frac{(2a+6)13}{a-15}\right) = \frac{-a+15-26a-78}{-9(a-15)} = \boxed{\frac{3a+7}{a-15}} \\ x &= \frac{1}{2}\left(3-\frac{3a+7}{a-15}+\frac{26}{a-15}\right) = \frac{3a-45-3a-7+26}{2(a-15)} = \boxed{\frac{-13}{a-15}}. \end{aligned}$$

- **Discussió i resolució amb determinats.** Propietats que utilitzem:

– El rang d'una matriu coincideix amb l'ordre del major menor no nul.
– El rang és igual a k si existeix un menor diferent de zero, d'ordre k, i tots els menors que resulten d'orlar-lo són iguals a zero.
– Els rangs de la matriu del sistema i de la matriu ampliada són iguals si i només si el sistema és compatible. A més, si és compatible i el rang és igual al nombre d'incògnites és determinat i si és compatible i el rang és menor que el nombre d'incògnites és indeterminat.

Estudiem els rangs de les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & a \\ a & 5 & -5 \end{pmatrix}$ i $A|B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & a & 4 \\ a & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Del càlcul de $\det A$ obtindrem informació sobre el valor de $\operatorname{rang} A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & a \\ a & 5 & -5 \end{vmatrix} = 30+a^2-30-6a-10a+15 = a^2-16a+15$$

$$\det A = 0 \iff a^2-16a+15=0 \iff a=8\pm\sqrt{64-15}=8\pm 7 = \begin{cases} 15 \\ 1. \end{cases}$$

– **Cas 1:** $a\neq 15$ i $a\neq 1 \iff \det A\neq 0 \iff \mathrm{r}(A)=3=\mathrm{r}(A|B)$.

– **Cas 2:** $a=15$ o $a=1 \iff \det A=0 \iff \mathrm{r}(A)\leq 2$. Estudiem separadament aquestes dues possibilitats:

— Si $\boxed{a=15}$, estudiem el rang a partir dels menors del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 15 & 4 \\ 15 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9\neq 0, \quad \det A = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 15 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -12+60+45+135-6-40 = 182\neq 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{r}(A)=2 \quad \text{i} \quad \mathrm{r}(A|B)=3.$$

— Si $\boxed{a=1}$, estudiem el rang a partir dels menors del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \text{ i } \det(A) = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -12+4+45+9-40-6=0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{r}(A) = 2 = \mathrm{r}(A|B).$$

Conclusió: En resulten els tres casos següents,

— $\boxed{a \neq 15 \quad \text{i} \quad a \neq 1} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B) = 3 \Longleftrightarrow \boxed{\text{Compatible determinat}}$.

— $\boxed{a = 15} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}(A|B) \Longleftrightarrow \boxed{\text{Incompatible}}$.

— $\boxed{a = 1} \Longleftrightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B) = 2 \Longleftrightarrow \boxed{\text{Compatible indeterminat}}$.

Resolució. Per al cas compatible determinat utilitzem la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & a \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{(a-15)(a-1)} = \frac{-13a+13}{(a-15)(a-1)} = \frac{-13(a-1)}{(a-15)(a-1)} = \boxed{\frac{-13}{a-15}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & a \\ a & 2 & -5 \end{vmatrix}}{(a-15)(a-1)} = \frac{3a^2+4a-7}{(a-15)(a-1)} = \frac{(3a+7)(a-1)}{(a-15)(a-1)} = \boxed{\frac{3a+7}{a-15}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ a & 5 & 2 \end{vmatrix}}{(a-15)(a-1)} = \frac{13a-13}{(a-15)(a-1)} = \frac{13(a-1)}{(a-15)(a-1)} = \boxed{\frac{13}{a-15}}.$$

Resolució del cas compatible indeterminat. És un sistema de rang 2. Només cal considerar dues equacions independents. Aquestes poden ser les dues primeres perquè $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ 2x + y = 3 + 2\lambda \\ 3x - 3y = 4 - \lambda \end{array}\right.$$

(La incògnita z s'ha pogut triar com a paràmetre o variable lliure, perquè les dues primeres columnes són linealment independents.)

Ara podem aplicar la regla de Cramer en el sistema 2×2.

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} 3+2\lambda & 1 \\ 4-\lambda & -3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{13+5\lambda}{9}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3+2\lambda \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}}{-9} = \frac{1+8\lambda}{9}, \qquad z = \lambda}.$$

2. Una empresa fabrica dos tipus A i B de productes. En la fabricació de cada unitat del producte A inverteix 5 hores de feina i 100 € de materials, i aconsegueix un benefici de 85 €. En la fabricació de cada unitat del producte B inverteix 7 hores de feina i 80 € de materials, i aconsegueix un benefici de 68 €. Cada setmana es disposa de personal per complir fins a 300 hores de treball, s'ha de complir un contracte de fabricació d'un mínim de 15 unitats d'A i 10 unitats de B setmanals i es pot gastar un màxim de 4800 € de material.
Quantes unitats setmanals de cada producte s'han de fabricar per obtenir un benefici màxim.

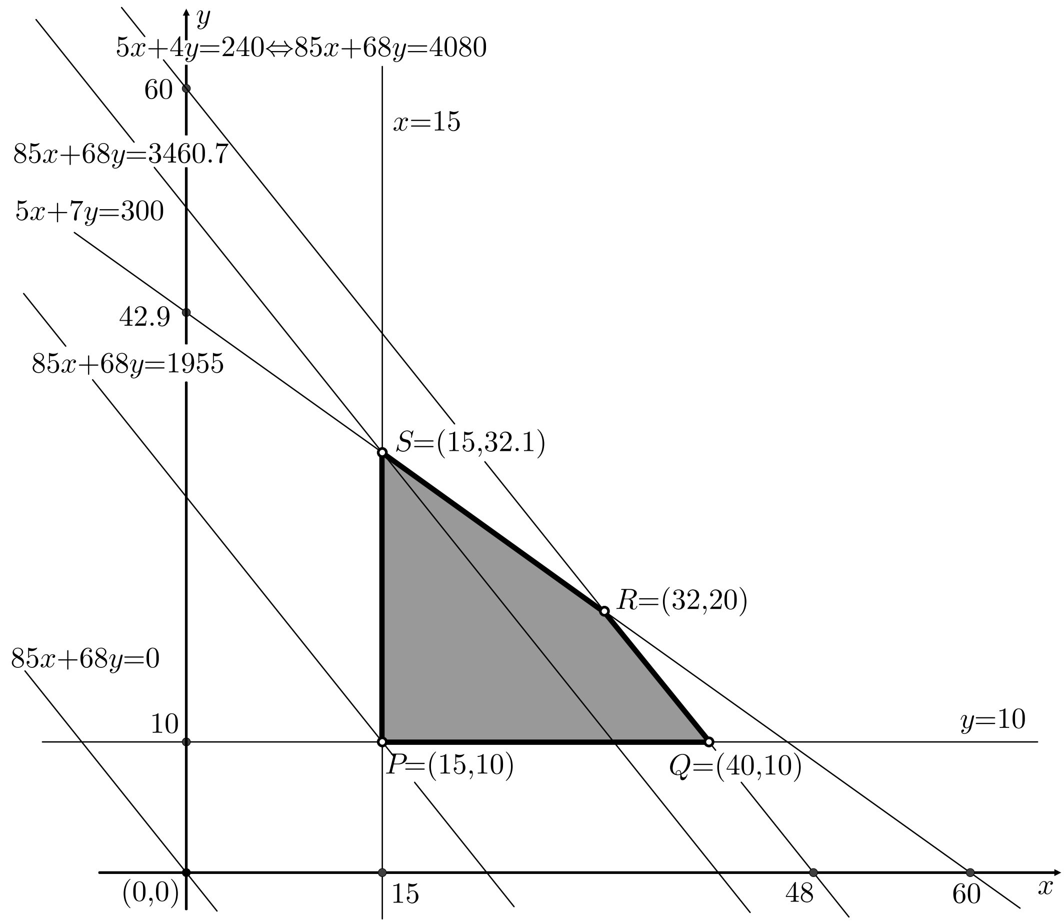
Anomenem $\begin{cases} x = \text{ nombre d'unitats del producte } A \text{ fabricades setmanalment.} & (x \geq 15) \\ y = \text{ nombre d'unitats del producte } B \text{ fabricades setmanalment.} & (y \geq 10) \end{cases}$

Informació per unitat de producte			
	Hores de feina (h)	Costos de material (€)	Benefici (€)
A	5	100	85
B	7	80	68

Informació del producte fabricat setmanalment			
	Hores de feina (h)	Costos de material (€)	Benefici (€)
A	$5x$	$100x$	$85x$
B	$7y$	$80y$	$68y$
$A+B$	$5x+7y$	$100x+80y$	$F(x,y)=85+68y$

De la informació anterior s'obtenen les restriccions sobre les variables x i y i el gràfic de més avall. El màxim de la funció F es troba en la frontera de la regió. Concretament, sobre algun o alguns dels vèrtexs de manera que si es troba sobre dos, tots els punts del segment que determinen també proporcionen màxims. A més, en aquest problema, les coordenades x, y han de ser enteres.

$$\begin{cases} x \geq 15 \\ y \geq 10 \\ 5x+7y \leq 300 \\ 100x+80y \leq 4800, \ (5x+4y=240) \end{cases}$$



Trobem els vèrtexs P, Q, R, S de la regió factible, mitjançant la intersecció de les rectes que la determinen, i calculem els valors de la funció F.

$$\begin{array}{ll} P \longrightarrow F(15,10) & = 85\cdot 15 + 68\cdot 10 = 1955 \\ Q \longrightarrow F(40,10) & = 85\cdot 40 + 68\cdot 10 = 4080 \\ R \longrightarrow F(32,20) & = 85\cdot 32 + 68\cdot 20 = 4080 \\ S \longrightarrow F(15,\frac{225}{7}) & = 85\cdot 15 + 68\cdot \frac{225}{7} = 3460.7 \end{array}$$

Per tant, el màxims s'assoleix en els punts de coordenades enteres del segment QR.

$$\left.\begin{array}{l} x,y\in\mathbb{Z} \\ 32\le x\le 40 \\ y = 60-\dfrac{5}{4}x \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c|c} \text{Unitats} & \text{Unitats} \\ \text{d'}A & \text{de } B \\ \hline 32 & 20 \\ 36 & 15 \\ 40 & 10 \end{array}$$

Per aquests valors s'obté el benefici $\boxed{4080\text{ €}}$.

3. • Exercici opcional. Calculeu el valor del determinant següent, presentant el resultat com un producte de diversos factors.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Indicació: Podeu començar amb les transformacions $\left\{\begin{array}{l} C_2 - C_1 \longrightarrow C_2 \\ C_3 - C_1 \longrightarrow C_3 \\ C_4 - C_1 \longrightarrow C_4\,, \end{array}\right.$ en què C_i representa la columna i-èsima.

Si fem les operacions entre columnes indicades obtenim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+a^2 & (c-b)(c+b+a) & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b+a & d+b+a \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}.$$

(1) Desenvolupem per la primera fila i traiem en cada columna el factor comú, respectivament, $b-a$, $c-a$, $d-a$.

(2) Transformacions: $\left\{\begin{array}{l} C_2 - C_1 \longrightarrow C_2 \\ C_3 - C_1 \longrightarrow C_3 \end{array}\right.$

(3) Desenvolupem per la primera fila i traiem en cada columna el factor comú, respectivament, $c-b$, $d-b$.