IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT CCSS — 19/X/2009
Funcions I — $20+20+20+20+30$

1. Trobeu el domini de les funcions
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\sqrt{x}$ b) $g(x)=\sqrt{3+7x-6x^2}$

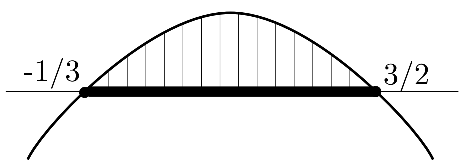
a) $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}$ tals que $x-2\neq 0$ i $x\geq 0\}$. És a dir, que hem d'imposar que $x\neq 2$ i $x\geq 0$, la qual cosa implica que

$$\boxed{Dom(f)=[0,+\infty)-\{2\}}\,.$$

b) $Dom(g)=\{x\in\mathbb{R}$ tals que $3+7x-6x^2\geq 0\}$. Per estudiar aquesta condició presentarem l'esquema gràfic de $y=3+7x-6x^2$ i n'observarem els punts d'ordenada positiva.

Talls OX: $3+7x-6x^2=0$

$$\Longrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{-12}=\frac{-7\pm 11}{-12}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{3}{2}\end{cases}$$



Conclusió: $\boxed{Dom(g)=\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}\right]}\,.$

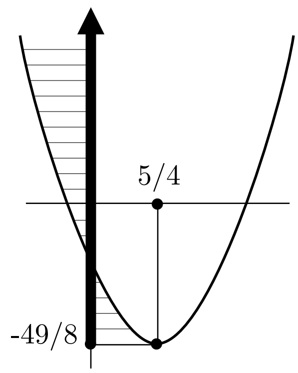
2. Trobeu el recorregut de les funcions
a) $f(x)=2x^2-5x-3$ b) $g(x)=\dfrac{x}{3-x}$

Trobarem els recorreguts a partir de l'observació del gràfic de f i g.

a) De fet n'hi ha prou en conèixer el punt mínim de la paràbola, —el vèrtex—, i fer-ne un esquema sense afinar en la cerca dels talls amb els eixos.

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4}\Longrightarrow y_v=f(x_v)=f\left(\frac{5}{4}\right)=2\cdot\frac{25}{16}-5\cdot\frac{5}{4}-3=-\frac{49}{8}\,.$$

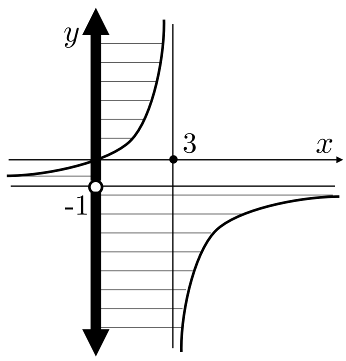
Conclusió: $\boxed{Im(f)=\left[-\dfrac{49}{8},+\infty\right)}\,.$



b) En ser el gràfic una hipèrbola equilàtera n'hi ha prou en trobar l'asímptota horitzontal. Llavors el seu recorregut serà el conjunt dels reals excepte el punt que determina aquesta asímptota.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\frac{3}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$
$$\Longrightarrow y=-1 \text{ és asímptota horitzontal.}$$

Conclusió: $\boxed{Im(g)=\mathbb{R}-\{-1\}}\,.$



Alternativa. Resolució algèbrica: Cal trobar els nombres y que tenen antiimatge.

a) Ha d'existir x tal que $2x^2 - 5x - 3 = y$.

$$2x^2 - 5x - 3 = y \Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24 + 8y}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49 + 8y}}{4}\,.$$

De l'última igualtat es conclou que x existeix sempre que $49 + 8y \geq 0$, és a dir $\boxed{y \geq -\dfrac{49}{8}}$.

b) Ha d'existir x tal que $\dfrac{x}{3-x} = y$.

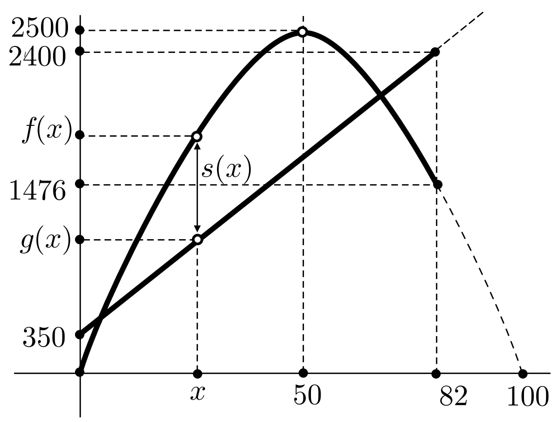
$$\frac{x}{3-x} = y \Longrightarrow x = 3y - xy \Longrightarrow x(1+y) = 3y \Longrightarrow x = \frac{3y}{1+y}\,.$$

De l'última igualtat es conclou que x existeix sempre que $\boxed{y \neq -1}$.

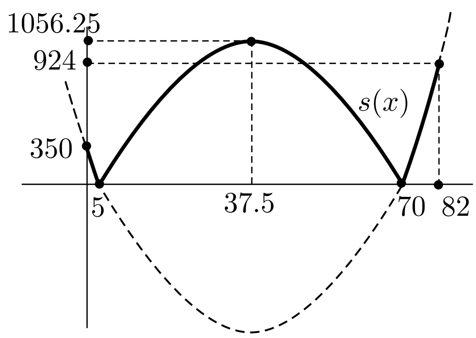
3. Donades les funcions $f(x) = 100x - x^2$ i $g(x) = 25x + 350$ definides en el domini $[\,0\,,\,82\,]$, representeu-les gràficament i trobeu el valor de la separació vertical màxima dels seus gràfics.

Del càlcul dels punts de tall de la funció quadràtica $f(x)$ amb els eixos, de la localització del seu vèrtex i del càlcul de dos punts de la funció afí $g(x)$ s'obtenen els valors numèrics i el gràfic adjunt. En aquest gràfic s'ha remarcat el significat de "separació vertical" amb la notació $s(x)$. Així veiem que la separació vertical $s(x)$ dels dos gràfics ve donada per la diferència de les ordenades de les funcions, en valor absolut. És a dir,

$$s(x) = |\,g(x) - f(x)| = \left|x^2 - 75x + 350\right|$$



Estudiarem el gràfic de $y = x^2 - 75x + 350$ i li farem el valor absolut. És immediat comprovar que els seus punts de tall amb els eixos de coordenades són $(5, 0)$, $(70, 0)$ i $(0, 350)$. D'altra banda el seu vèrtex es troba en el punt $(37.5, 1056.25)$. Llavors en fer el valor absolut resulta el gràfic adjunt i els candidats a màxim són els valors $s(x)$ en els punts $x = 0$, $x = 82$ i $x = 37.5$.



$$s(0) = 350,\ \ s(37.5) = 1056.25 \text{ i } s(82) = 924.$$

Consegüentment, $\boxed{\text{la separació màxima val } 1056.25 \text{ i s'assoleix en } x = 37.5}$.

4. Siguin les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ i $g(x) = x^2 + 1$.

a) Trobeu l'expressió analítica de $(f \circ g)(x)$ i les seves asímptotes mitjançant el càlcul dels límits corresponents.

b) Trobeu l'expressió analítica de les dues funcions inverses de $g(x)$ i dibuixeu les tres funcions en uns mateixos eixos de coordenades.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \dfrac{1}{x^2+1-1} = \dfrac{1}{x^2}$

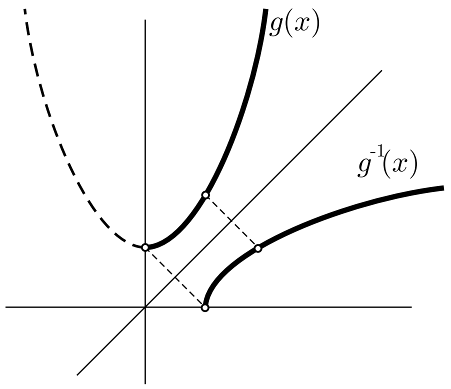
Asímptota horitzontal: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$.

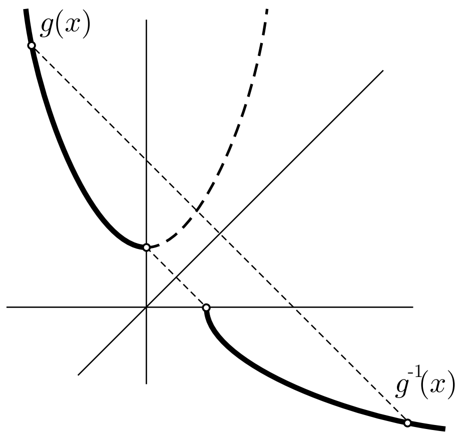
Asímptota vertical: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \boxed{x=0}$.

b) $y = x^2+1 \Longrightarrow x = \left(y^{-1}\right)^2 + 1 \Longrightarrow y^{-1} = \pm\sqrt{x-1}$. Per tant les inverses són,

–En el domini $[0,+\infty)$, $\boxed{g^{-1}(x) = \sqrt{x-1}}$.

–En el domini $(-\infty, 0]$, $\boxed{g^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}}$.





5. Calculeu raonadament a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-3x^2+7}{5x^3+x+7}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+6x^2+12x+8}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{x^2+4x}{x+2}\right)$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-3x^2+7}{5x^3+x+7} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}} = \frac{2-0+0}{5+0+0} = \boxed{\frac{2}{5}}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+6x^2+12x+8} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x^2+4x+4)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-2} \frac{(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{0^+} = \boxed{+\infty}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{x^2+4x}{x+2}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+2x^4-x^5-4x^4-x^2-4x}{x^4+2x^3+x+2}$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^4-x^2-4x}{x^4+2x^3+x+2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{-2-0-0}{1+0+0+0} = \boxed{-2}$.