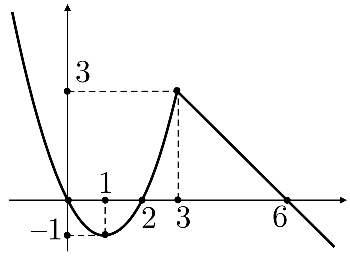
1. Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + c\,x & \text{si} \quad x < 3 \\ a - x & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$

Sabem que $f'(1) = 0$ i f és contínua. Trobeu c i a, i representeu f gràficament.

$f'(x) = 2x + c$ si $x < 3 \Longrightarrow f'(1) = 2 + c$. Llavors,

$$0 = f'(1) = 2 \cdot 1 + c = 2 + c \Longrightarrow \boxed{c = -2}.$$



f és contínua implica que f és contínua en $x = 3$. Llavors,

$$\lim_{x \to 3^-} x^2 + cx = \lim_{x \to 3^+} a - x \Longrightarrow 9 + 3c = a - 3$$
$$\Longrightarrow 9 - 6 = a - 3 \Longrightarrow \boxed{a = 6}.$$

2. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 12x + 30}{(x-4)^2}$.

Feu-ne el càlcul de l'asímptota oblíqua i verifiqueu que és la recta $y = x + 3$. Trobeu raonadament, amb l'ajut del teorema de Bolzano, el tall del gràfic de la funció f amb l'eix de les abscisses amb un error menor que $5 \cdot 10^{-1}$.

Si existeix asímptota oblíqua, la seva equació és del tipus $y = mx + b$, en què

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 12x + 30}{x^3 - 8x^2 + 16x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{30}{x^3}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}} \\ &= \frac{1 - 0 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{1}{1} = 1 \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 12x + 30}{x^2 - 8x + 16} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 4x + 30}{x^2 - 8x + 16} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{30}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 3. \end{aligned}$$

Conseqüentment, aquesta asímptota existeix i la seva equació és $\boxed{y = x + 3}$.

$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 5x^2 + 12x + 30 = 0$ i $x \neq 4$. Això implica que cal trobar una arrel del polinomi $p(x) = x^3 - 5x^2 + 12x + 30$. Si podem trobar un interval adequat en què la funció polinòmica p satisfagui les hipòtesis del teorema de Bolzano haurem acabat.

És immediat observar que $p(-2) = -22 < 0$ i $p(-1) = 12 > 0$ llavors, en ser p contínua, existeix $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $p(\alpha) = 0$. Per tant, tenim que l'arrel serà $x \approx -1.5$ amb un error menor que 0.5.

3. Sigui la funció $\quad f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

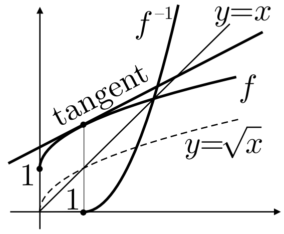
a) Utilitzeu la definició de derivada per calcular $f'(1)$ i trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic de f en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Dibuixeu els gràfics de f, f^{-1} i de la recta tangent de l'apartat anterior.

a) Passem al càlcul de la derivada i recordem que l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+\sqrt{1+h}-\left(1+\sqrt{1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

b) Dibuixem el gràfic de $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ mitjançant una translació del gràfic de $y = \sqrt{x}$ de vector $(0, 1)$.
Dibuixem el gràfic de f^{-1} mitjançant una simetria axial d'eix $y = x$ aplicada sobre el gràfic de f.
El gràfic de la recta tangent talla l'eix d'ordenades en el $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ i passa pel punt $(1, 2)$.



4. Sigui la funció $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2$.

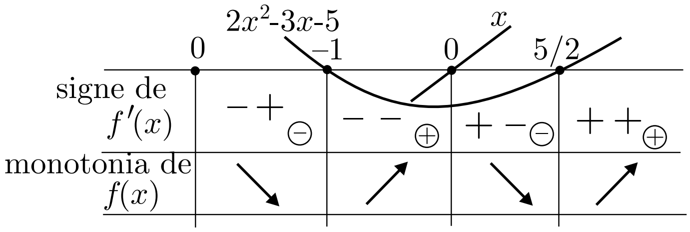
a) Calculeu $f'(x)$, estudieu el seu signe i trobeu els intervals de creixement i decreixement de f.

b) Representeu gràficament la funció f, amb l'ajut de la informació anterior i dels seus talls amb els eixos de coordenades.

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x = 2x(2x^2 - 3x - 5)$.

Candidats a extrems locals: $f'(x) = 0 \iff x = 0$ o bé $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \dfrac{3 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ -1 \end{array}\right.$

• f és monòtona decreixent en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, i és monòtona creixent en $(-1, 0) \cup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.



• f té mínims locals en $x = -1$ i $x = \dfrac{5}{2}$, i el seus valors són $f(-1) = -2$ i $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -23.4375$.

• f té un màxim local en $x = 0$ i el seu valor és $f(0) = 0$.

b) Talls amb l'eix de les abscisses:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2(x^2 - 2x - 5) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ o bé } x^2 - 2x - 5 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ o bé } x = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Tall amb l'eix de les ordenades: $f(0) = 0$.