Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES CCSS – 2N DE BAT
Inicial

15/10/15
$15+15+15+10 = 45$ punts

NOM:

Enunciat 1. Donada la funció $f(x) = \sqrt{6x^3-11x^2-3x+2}$, trobeu el seu domini a partir de l'estudi del signe del polinomi $p(x) = 6x^3-11x^2-3x+2$, en què utilitzareu els gràfics de rectes i/o paràboles.

- Descomposició de $p(x)$:
(Regla de Ruffini)

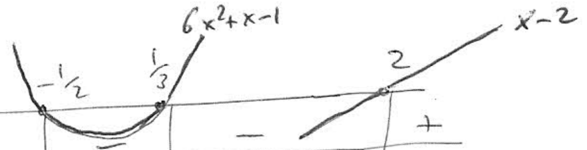
$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -11 & -3 & 2 \\ 2 & & 12 & 2 & -2 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Arrels de $6x^2+x-1$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$p(x) = (x-2)(6x^2+x-1)$

- Signe de $p(x)$:



		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$		$+$
$6x^2+x-1$	$+$	$-$	$+$		$+$
$p(x)$	$-$	$+$	$-$		$+$

- $\text{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{6x^3-11x^2-3x+2}_{p(x)} \geq 0\} = \boxed{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \cup [2, +\infty)}$

Enunciat 2. Sigui $f(x) = \sqrt{x^2-5} - \sqrt{x^2-3x}$

a) Calculeu l'antiimatge de $\frac{3}{2}$.

b) Calculeu $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Trobeu $\mathrm{Dom} f$.

Plantejament

a) $\frac{3}{2} = \sqrt{x^2-5} - \sqrt{x^2-3x}$

$\Downarrow$

$3 + 2\sqrt{x^2-3x} = 2\sqrt{x^2-5}$

$\Downarrow$

$9 + 12\sqrt{x^2-3x} + 4(x^2-3x) = 4(x^2-5)$

$\Downarrow$

$12\sqrt{x^2-3x} = 12x - 20 - 9$

$\Downarrow$

$12\sqrt{x^2-3x} = 12x - 29$

$\cancel{144x^2} - 432x = \cancel{144x^2} - 696x + 841$

$\Downarrow$

$264x = 841$

$\Downarrow$

$x = \frac{841}{264}$ → Aquesta solució és bona (comprovat amb calculadora)

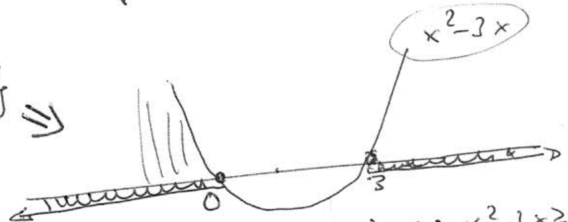
b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5} - \sqrt{x^2-3x} = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2-3x}} =$

Indet.

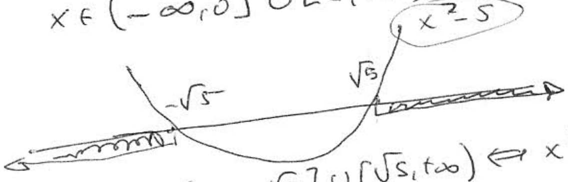
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2-3x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \frac{3-0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Indet

c) $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-5 \geq 0 \text{ i } x^2-3x \geq 0\} \Rightarrow$



$x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \Leftrightarrow x^2-3x \geq 0$



$x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty) \Leftrightarrow x^2-5 \geq 0$

Conclusió

El Dom f serà la intersecció dels dos conjunts, és a dir

$\boxed{(-\infty, -\sqrt{5}] \cup [3, +\infty)}$

Enunciat 3. Sigui $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{, si } x > 2 \\ -\dfrac{x}{3} & \text{, si } x \leq 2 \end{cases}$

a) Calculeu $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

b) Raoneu, a partir de l'apartat anterior quines són les seves asímptotes i els tipus de discontinuïtat que s'hi troben.

c) Representeu el seu gràfic.

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{x}{3} = -\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

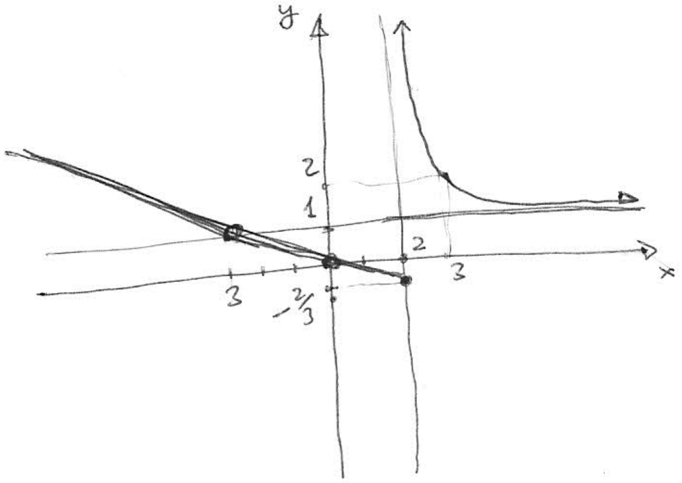
b) $\Rightarrow$ discontinuïtat asimptòtica
$x = 2$ és asímptota vertical

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$
Indet

$\Rightarrow$ $y = 1$ és asímptota horitzontal

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -\frac{x}{3} = -(-\infty) = +\infty$

c)



$f(3) = \frac{3-1}{3-2} = 2$
$f(0) = 0$
$f(-3) = 1$
$f(2) = -\frac{2}{3}$

Enunciat 4. Trobeu raonadament el nombre $x \in \mathbb{R}$ tal que l'excés de deu vegades el nombre sobre el triple del seu quadrat és màxim. És racional o irracional?

- Segons l'enunciat

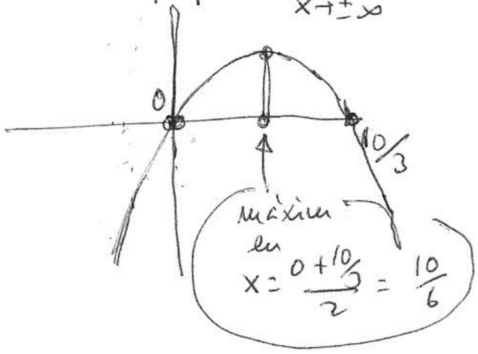
  $10x - 3x^2$ ha de ser màxim

- Representem $y = 10x - 3x^2$ gràficament

  Talls OX: $x(10-3x) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \frac{10}{3}$

  Té les branques avall perquè $\lim_{x \to \pm\infty} 10x - 3x^2 = +\infty$

  Gràfic



- Conclusió:

  El nombre buscat és $x = \frac{5}{3}$ i el valor de l'excés màxim

  és $10 \cdot \frac{5}{3} - 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 = (10-5) \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$