IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 3R ESO BC-II 5/V/2003
Problemes de segon grau i combinatòria

---

1. En una aula hi ha 14 noies i 11 nois. Es vol formar un equip de tres noies i tres nois. Quantes composicions diferents podria tenir aquest equip?

Noies: $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{13}, D_{14}$.
Nois: $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{10}, H_{11}$.

Equips de tres noies. $\longrightarrow$	Col·leccions de $n = 14$ noies triades de 3 en 3, en què no importa l'ordre i no hi ha repetició.	Per exemple: $D_1D_3D_4 = D_4D_3D_1$. No s'admet $D_1D_2D_2$.	C^3_{14}
Equips de tres nois. $\longrightarrow$	Col·leccions de $n = 11$ noies triats de 3 en 3, en què no importa l'ordre i no hi ha repetició.	Per exemple: $H_2H_3H_7 = H_2H_7H_3$. No s'admet $H_7H_2H_2$.	C^3_{11}

Finalment, cada equip de grup de 3 noies pot fer equip amb qualsevol grup de 3 nois. Per tant, el nombre final d'equips és

$$C^3_{14} \cdot C^3_{11} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = (14 \cdot 13 \cdot 2) \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 = 364 \cdot 165 = \boxed{60060}.$$

2. Un polígon regular té 779 diagonals. Quants costats té?

Mètode 1: Cada diagonal d'un polígon està determinada per dos vèrtexs. Per fer-ne el recompte només caldrà comptar el nombre de parelles de vèrtexs que es poden construir i restar-li el nombre de parelles de vèrtexs que no són diagonals, és a dir, restar-li el nombre de costats del polígon.

- Disposem, doncs, de n vèrtexs, $V_1, V_2, \ldots V_n$, i hem de de construir col·leccions de $k = 2$ vèrtexs.

- Dins de cada parella l'ordre no importa perquè les parelles V_iV_j i V_jV_i determinen la mateixa diagonal.

- Els elements , dins de cada parella, no es poden repetir, perquè les parelles del tipus V_iV_i determinen un punt i no un segment. Per tant el recompte de parelles ve donat per C^2_n. Si restem, tal com hem dit, el nombre n de costats tenim:

$$\text{Nombre de diagonals} = C^2_n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Finalment, si imposem que aquest nombre és 779, en resulta

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = 779 \Longleftrightarrow n^2 - 3n - 1558 = 0 \Longleftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 6232}}{2} = \frac{3 \pm 79}{2} = \begin{cases} \boxed{41} \\ -38\,. \end{cases}$$

Mètode 2: De cada vèrtex surten diagonals a tots els vèrtexs excepte al mateix vèrtex i als dos vèrtexs adjacents. És a dir, des de cada vèrtex surten $n - 3$ diagonals. En haver-hi n vèrtexs comptem $n(n-3)$ diagonals. Però, d'aquesta manera hem comptat cada diagonal dues vegades, una quan utilitzem un dels vèrtexs extrems de la diagonal i una altra quan hem utilitzat l'altre. Per tant, el nombre de diagonals és: $\dfrac{n(n-3)}{2}$. A partir d'aquí segueix igual que abans.

3. En un país les matrícules dels cotxes es formen amb quatre xifres que es poden repetir triades entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, i tres lletres que també es poden repetir. Aquestes últimes es trien entre les lletres

B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, X, Y, Z.

Calculeu quantes matrícules diferents es poden formar.

Agrupacions de quatre nombres.	$\longrightarrow$	Col·leccions de $n=10$ nombres triats de 4 en 4, en què importa l'ordre i hi pot haver repetició.	Per exemple: $1340 \neq 0134$. S'admet 1222.	VR_{10}^4
Agrupacions de tres lletres.	$\longrightarrow$	Col·leccions de $n=21$ lletres triades de 3 en 3, en què importa l'ordre i hi pot haver repetició.	Per exemple: $ABC \neq BCA$. S'admet CCX.	VR_{21}^3

Finalment, cada agrupació de 4 nombres pot completar una matrícula amb qualsevol grup de 3 lletres. Per tant, el nombre final de matrícules és

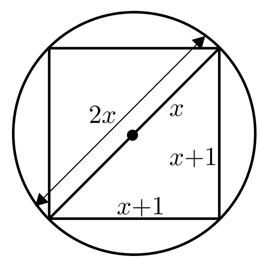
$$\mathrm{VR}_{10}^4 \cdot \mathrm{VR}_{21}^3 = 10^4 \cdot 21^3 = 10000 \cdot 9261 = \boxed{92610000}.$$

4. El costat del quadrat inscrit en una circumferència és un metre més llarg que el radi de la circumferència. Trobeu el diàmetre de la circumferència.

Anomenem x el valor del radi de la circumferència. Pel teorema de Pitàgores tenim l'equació:

$$(2x)^2 = (x+1)^2 + (x+1)^2, \quad \text{és a dir,}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 2(x+1)^2 \\ 2x^2 &= (x+1)^2 \\ 2x^2 &= x^2+2x+1 \\ x^2-2x-1 &= 0 \end{aligned}$$



$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ \cancel{1-\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Llavors, el diàmetre és: $2x = 2(1+\sqrt{2}) \approx \boxed{4.83 \text{ m}}$.

5. Sabem que $6\mathrm{V}_x^3 = 55\mathrm{VR}_x^2$. Calculeu el valor de x.

D'aquesta igualtat en resulten les equacions equivalents següents:

$$\begin{aligned} 6x(x-1)(x-2) &= 55x^2 \\ 6x^2-18x+12 &= 55x \\ 6x^2-73x+12 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{73 \pm \sqrt{5329-288}}{12} = \frac{73 \pm 71}{12} = \begin{cases} \boxed{12} \\ \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

6. Quin nombre hem de restar a cadascun dels factors del producte $37 \cdot 23$, per tal que aquest producte disminueixi en 500 unitats?

$x =$ nombre que hem de restar.
De l'enunciat en resulten les equacions equivalents següents que cal resoldre.

$$\begin{gathered}(37-x)(23-x) = 37 \cdot 23 - 500 \\ 37 \cdot 23 - 37x - 23x + x^2 = 37 \cdot 23 - 500 \\ x^2 - 60x + 500 = 0\end{gathered}$$

$$\frac{60 \pm \sqrt{3600-2000}}{2} = \frac{60 \pm 40}{2} = \begin{cases} \boxed{50} \\ \boxed{10}. \end{cases}$$

Comprovació:

$$\begin{aligned}&37 \cdot 23 - 500 = 851 - 500 = 351. \\ &(37-50)(23-50) = (-13)(-27) = 351. \\ &(37-10)(23-10) = 27 \cdot 13 = 351.\end{aligned}$$