IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 3R ESO BC-II 9/VI/2003

Combinatòria, estadística I probabilitat (1+1)+(1+1)+(1+(∗))+(1+1.5)+(0.5+1+1)

1. Cadascun dels vuit quadrats de les figures adjuntes es pot pintar de color blanc o negre.

a) Quants models diferents es poden crear en què hi hagi 4 quadrats blancs i 4 negres?

b) Quants models diferents es poden obtenir en total, considerant totes les possibilitats de pintar quadrats blancs i negres?

a) Codifiquem amb la lletra **B** els quadrats pintats e blanc, i amb la lletra **N** els quadrats pintats de negre. Per exemple, l'últim model de l'enunciat seria **BBNNBBNB**.

O sigui que disposem d'un total de $n = 2$ lletres diferents. Es tracta de fer el recompte de totes les col·leccions de $k = 8$ lletres, en què hi ha 4 vegades la lletra **B** i 4 vegades la **N**.

Observem que **importa l'ordre**, perquè canvi d'ordre implica visualització diferent dels quadres. A més, les lletres es repeteixen un nombre fix de vegades en cada col·lecció, 4 vegades la **B** i 4 vegades la **N**. Per tant, el nombre de models diferents que es poden crear són

$$\mathrm{PR}_8^{4,4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 2\cdot 5 = \boxed{70}.$$

b) En aquest cas es repeteixen les circumstàncies del cas anterior amb una excepció: el nombre de vegades que es repeteix cada lletra en una mateixa col·lecció no està fixat. Per tant, el nombre de models que es poden crear és:

$$\mathrm{VR}_2^8 = 2^8 = \boxed{256}.$$

2. Considereu totes les xifres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Quants nombres de quatre xifres diferents (inclosos els que comencen amb zero), podem construir amb ells?

b) Si en triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui del tipus 1 _ _ 8?

a) Tenim $n = 10$ xifres per construir col·leccions de $k = 4$ xifres. L'ordre importa, perquè en canviar-lo resulten nombres diferents. A més, l'enunciat diu que els elements en una mateixa col·lecció no es poden repetir. Per tant, el nombre de números de 4 xifres diferents és

$$\mathrm{V}_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \boxed{5040}.$$

b) En fer una tria, el total de **casos possibles** és el calculat a l'apartat anterior, 5040. Els **casos favorables** seran tots aquells que comencin en 1 i acabin en 8. Es tracta de construir col·leccions de $k = 2$ xifres diferents, triades entre $n = 8$ xifres (totes, excepte el 1 i el 8), per col·locar-les en el lloc de les desenes i de les centenes. En aquest cas l'ordre també importa i no hi ha repetició. Per tant, el nombre de casos favorables és

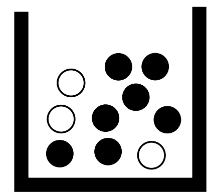
$$\mathrm{V}_8^2 = 8\cdot 7 = 56.$$

Conseqüentment, la probabilitat cercada és $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}} = \dfrac{56}{5040} = \dfrac{1}{90} = \boxed{0.011}.$

3. Tenim una caixa amb tres boles blanques i set negres.

a) Si traiem una bola quina és la probabilitat que sigui negra?

b) Si traiem una bola i la deixem fora i després en traiem una altra, quina és la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona negra?
(Indicació: Podeu resoldre'l construint un arbre de dos nivells que descrigui les dues extraccions.)

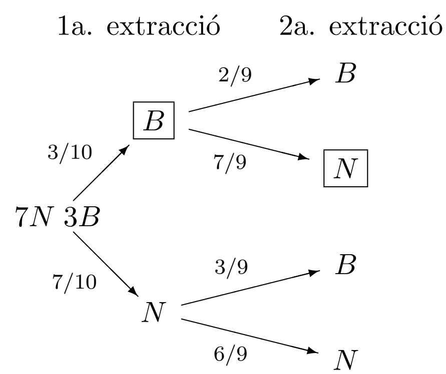


a) **Casos favorables:** Cadascuna de les extraccions d'una bola negra, en total 7 casos.
Casos possibles: Cadascuna de les extraccions d'una bola, en total 10 casos.

$$\text{Probabilitat de treure bola negra} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}} = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}.$$

b) Representem per B l'esdeveniment "treure bola blanca", i per N "treure bola negra". L'arbre de probabilitats adjunt dóna la clau per resoldre aquest apartat:
La probabilitat demanada surt de multiplicar la probabilitat $\frac{3}{10}$ de treure blanca la primera, per la probabilitat $\frac{7}{9}$ de treure negra la segona si sabem que la primera ha sigut blanca.

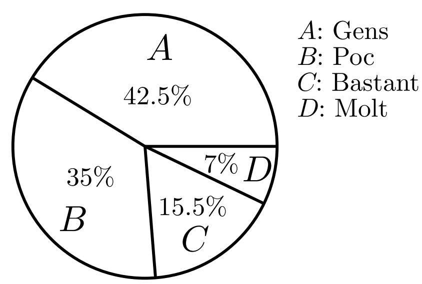
$$\text{Probabilitat} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30} = \boxed{0.233}.$$



4. El diagrama de sectors adjunt, correspon al resultat d'una enquesta feta a un col·lectiu de 5000 joves de 20 a 25 anys, que contestaven sobre si els interessava la política.

a) Descriviu en graus i minuts l'angle de cada sector.

b) Descriviu la freqüència absoluta de cada valor A, B, C, D de la variable "interès per la política", i digueu de quin tipus és aquesta variable.



La variable és **qualitativa**, perquè estudia una característica, —interès per la política—, de la població que en aquest cas no hem mesurat numèricament. Si haguéssim puntuat amb valors enters de 0 a 10 l'interès per la política, la variable hagués sigut del tipus quantitatiu discret. Les descripcions demanades venen presentades a la taula adjunta, en què s'han calculat els percentatges de 360° i de 5000 demanats

x	Angle		f. a.	
A	$0.425 \cdot 360° =$	$153°$	$0.425 \cdot 5000 =$	2125
B	$0.35 \cdot 360° =$	$126°$	$0.35 \cdot 5000 =$	1750
C	$0.155 \cdot 360° =$	$55°48'$	$0.155 \cdot 5000 =$	775
D	$0.07 \cdot 360° =$	$25°12'$	$0.07 \cdot 5000 =$	350

5. S'ha mesurat l'altura en centímetres de 50 persones i s'ha obtingut la distribució de freqüències absolutes adjunta.

a) Elaboreu una taula en què apareguin els valors de la taula adjunta i les freqüències absolutes acumulades.

b) Representeu l'histograma i el polígon de freqüències absolutes acumulades.

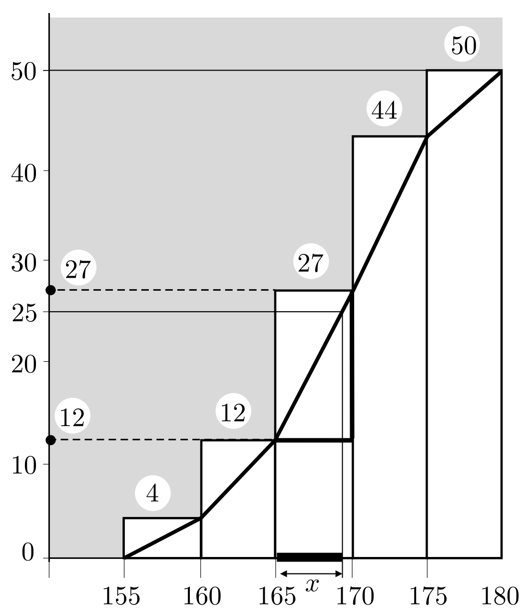
c) Calculeu la mitjana i la mediana de la variable.

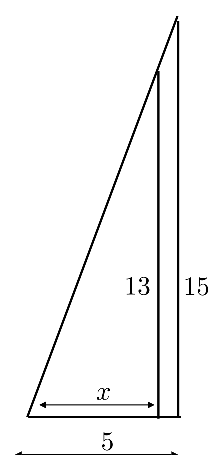
x	f. a.
(155 , 160]	4
(160 , 165]	8
(165 , 170]	15
(170 , 175]	17
(175 , 180]	6

a) La taula estadística demanada és la següent:

x	f. a.	f. a. a.
(155 , 160]	4	4
(160 , 165]	8	12
(165 , 170]	15	27
(170 , 175]	17	44
(175 , 180]	6	50

b) L'histograma i el diagrama de freqüències absolutes acumulades són els següents, —hem adjuntat el triangle que permet el càlcul de la mediana de l'apartat últim de l'exercici—:





c) De l'observació de la proporcionalitat entre els costats dels triangles semblants de la figura, en resulta la mediana:

$$\frac{x}{5} = \frac{13}{15} \Longrightarrow x = \frac{5 \cdot 13}{15} = 4.33 \Longrightarrow \textbf{Mediana} = 165 + 4.33 = \boxed{169.33}.$$

Calculem la **mitjana** $\overline{x}$ a partir de les freqüències absolutes i de les marques de classe 157.5, 162.5, 167.5, 172.5, 177.5:

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 157.5 + 8 \cdot 162.5 + 15 \cdot 167.5 + 17 \cdot 172.5 + 6 \cdot 177.5}{50} = \frac{8440}{50} = \boxed{168.8}.$$