1. Resoleu les equacions:

a) $2x - (3x-2) = x+5\,.$ b) $\dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{x-1}{2} = 7 - \dfrac{5x}{2}\,.$

a) $2x - (3x-2) = x+5 \iff -x+2 = x+5 \iff -2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{-2} \iff \boxed{x = -\dfrac{3}{2}}.$

b) $$\frac{3x+1}{5} - \frac{x-1}{2} = 7 - \frac{5x}{2} \overset{(\times 10)}{\iff} 6x+2-5x+5 = 70-25x$$
$$\iff (6-5+25)x = 70-2-5 \iff 26x = 63 \iff \boxed{x = \frac{63}{26}}.$$

2. Un comerciant té dues classes de pomes, A i B. Les de classe A van a 3 euros/kg, les de classe B van a 2 euros/kg. Ven 4 kg més de pomes de classe A que de pomes de classe B i, en total, obté 247 euros per la seva venda. Quants kg de pomes ha venut de cada classe?

A partir de l'enunciat organitzem les dades i les condicions del problema en el quadre següent:

	Pes	Preu/kg	Preu total
Pomes de classe A	x	3	$3x$
Pomes de classe B	$y = x-4$	2	$2y$
Total de pomes			$3x+2y = 247$
Unitats	kg	euros	euros.

Resolem el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y = x-4 \\ 3x+2y = 247 \end{array}\right\} \implies 3x + 2(x-4) = 247 \implies 5x - 8 = 247$$
$$\implies x = \frac{247+8}{5} = 51 \implies y = 51-4 = 47.$$

Per tant, ha venut $\boxed{\text{51 kg de pomes de classe } A \text{ i 47 kg de classe } B}$.

3. Sigui el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{l} x-3y=2 \\ 3x+3y=26. \end{array}\right.$

a) Resoleu-lo pel mètode de reducció.

b) Resoleu-lo pel mètode de substitució.

c) Representeu gràficament cadascuna de les equacions sobre els mateixos eixos de coordenades, mitjançant la recerca dels dos punts de tall amb aquests eixos i un altre punt qualsevol. Observeu si les rectes es tallen i, si ho fan, digueu en quin punt. Comenteu si el resultat d'aquesta observació té relació amb les solucions dels apartats (a) i (b).

a) **Mètode de reducció:** Anomenem E_1 i E_2 les equacions.

$$\begin{array}{rl} E_1: & x-3y=2 \\ E_2: & 3x+3y=26 \\ \hline E_1+E_2: & 4x \quad =28 \end{array} \Longrightarrow \boxed{x=7}.$$

$$\begin{array}{rl} -3E_1: & -3x+9y=-6 \\ E_2: & 3x+3y=26 \\ \hline -3E_1+E_2: & 12y=20 \end{array} \Longrightarrow y=\frac{20}{12} \Longrightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}}.$$

b) **Mètode de substitució:** Aïllem x en la primera equació:

$$x = 2+3y\,. \tag{1}$$

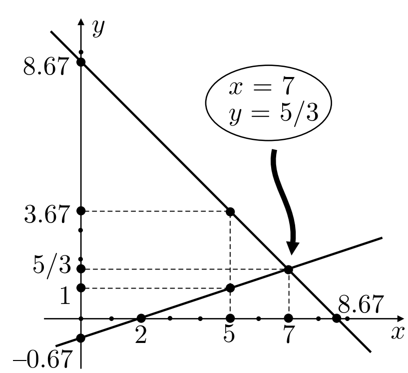
Substituïm aquesta expressió de x a la segona equació. En resulta una equació amb incògnita y i la resolem:

$$3(2+3y)+3y=26 \quad\Longrightarrow\quad 6+9y+3y=26 \Longrightarrow 12y=20 \Longrightarrow y=\frac{20}{12} \Longrightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}}$$

$$\Longrightarrow\quad x=2+3\cdot\frac{5}{3}=2+5=7 \Longrightarrow \boxed{x=7}.$$

c) Cerquem els punts demanats a l'enunciat:

	E_1 x	E_1 y	E_2 x	E_2 y
Tall eix OX	0	$-\frac{2}{3}\approx -0.67$	0	$\frac{26}{3}\approx 8.67$
Tall eix OY	2	0	$\frac{26}{3}\approx 8.67$	0
Punt	5	1	5	$\frac{11}{3}\approx 3.67$



Observem que les rectes es tallen aproximadament en el punt $\left(7\,,\,\frac{5}{3}\right)$, la qual cosa concorda amb el resultat de la resolució algèbrica del sistema.

4. Opereu i simplifiqueu sense utilitzar la calculadora ni el llenguatge decimal i presenteu el resultat en forma d'enter o fracció d'enters:

a) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{6}\right)$. b) $\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot 6-3}{\left(7-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 6}$. c) $\dfrac{0.01^{-3000}}{100^{3010}\cdot 10^{-20}}$.

a) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{7}{3\cdot 3}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{7}{9}=\dfrac{27-35}{45}=\boxed{-\dfrac{8}{45}}$.

b) $\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot 6-3}{\left(7-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 6}=\dfrac{3-3}{\left(\dfrac{14-1}{2}\right)\cdot 6}=\dfrac{0}{\dfrac{13\cdot 6}{2}}=\boxed{0}$.

c) $\dfrac{0.01^{-3000}}{100^{3010}\cdot 10^{-20}}=\dfrac{\left(10^{-2}\right)^{-3000}}{\left(10^{2}\right)^{3010}\cdot 10^{-20}}=\dfrac{10^{6000}}{10^{6020}\cdot 10^{-20}}=\dfrac{10^{6000}}{10^{6000}}=\boxed{1}$.

Inequacions de primer grau i equacions de segon grau

5. Resoleu l'equació $x^2-4x-21=0$ amb el mètode de completar quadrats.

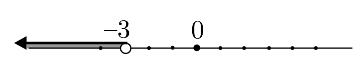
b) Cal trobar un binomi tal que el seu quadrat tingui una part igual a x^2-4x. Després s'haurà de completar per tal d'obtenir el coeficient -21. El quadrat del binomi que convé considerar és $(x-2)^2=x^2-4x+4$, perquè obtenim els dos primers sumands que ens interessen. El completem per obtenir l'equació. Per aconseguir-ho caldrà restar-li 4 i sumar-li -21:

$$x^2-4x-21=0 \iff (x-2)^2-4-21=0 \iff (x-2)^2-25=0 \iff (x-2)^2=25$$
$$\iff x-2=\pm 5 \iff x=2\pm 5= \begin{cases}\boxed{7}\\ \boxed{-3}\end{cases}.$$

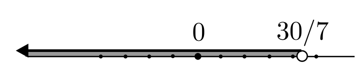
6. Resoleu les inequacions següents i representeu els resultats gràficament sobre la recta numèrica.

a) $3x+1>5x+7$ b) $x-\dfrac{x-2}{4}<3+\dfrac{x}{6}$.

a) $3x+1>5x+7 \iff -2x>6 \overset{(\div -2)}{\iff} x<\dfrac{6}{-2} \iff \boxed{x<-3}$.



b) $x-\dfrac{x-2}{4}<3+\dfrac{x}{6} \overset{(\times 12)}{\iff} 12x-3x+6<36+2x$
$\iff (12-3-2)x<36-6$
$\iff 7x<30 \iff \boxed{x<\dfrac{30}{7}}$.



7. Dos nombres que es diferencien en una unitat tenen la suma dels seus quadrats igual a $\dfrac{1}{4}$. Trobeu una equació de segon grau que satisfagui el més petit dels dos nombres.

Sigui x el més petit dels dos nombres. Llavors, $x+1$ serà l'altre nombre. Imposem la condició de l'enunciat i en resulta

$$x^2+(x+1)^2=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow x^2+x^2+2x+1=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \boxed{2x^2+2x+\frac{3}{4}=0}.$$

Fins aquí hem resolt el que demanava l'enunciat.

Algunes qüestions suplementàries:

- Cercarem els nombres x i $x+1$:

$$2x^2+2x+\frac{3}{4}=0 \Longleftrightarrow x^2+x+\frac{3}{8}=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}=0$$
$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}$$

Aquesta equació no té solució perquè un nombre real elevat al quadrat no pot ser negatiu. Per tant, no existeixen nombres reals amb les condicions de l'enunciat.

- Quin valor hauria de tenir la suma dels quadrats dels dos nombres per tal que existissin?

Si anomenem k la suma dels quadrats, tenim

$$x^2+(x+1)^2=k \Longleftrightarrow 2x^2+2x+1-k=0 \Longleftrightarrow x^2+x+\frac{1-k}{2}=0$$
$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1-k}{2}=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-1+2-2k}{4}=0$$
$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1-2k}{4}=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2k-1}{4}$$

Per a que existeixi solució cal que $\dfrac{2k-1}{4}\geq 0 \Longleftrightarrow 2k-1\geq 0 \Longleftrightarrow 2k\geq 1 \Longleftrightarrow k\geq \dfrac{1}{2}$.

És a dir, haguéssim pogut trobar dos nombres que es diferenciessin en una unitat si haguéssim donat per a la suma dels seus quadrats qualsevol nombre major o igual que $\frac{1}{2}$.

Alumnes que han de recuperar: 1,2,3,4

Alumnes que no han de recuperar: 3,4c,5,6,7