1. Considereu les funcions

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{i} \qquad g(x) = -\frac{3}{2}\,x\,.$$

a) Trobeu els punts de tall dels seus gràfics amb els eixos de coordenades i el vèrtex del gràfic de la funció quadràtica.

b) Representeu $f(x)$ i $g(x)$ gràficament.

c) Trobeu analíticament les coordenades dels punts d'intersecció dels dos gràfics i comenteu si coincideixen amb les representacions gràfiques de l'apartat anterior.

d) Observeu el gràfic de $f(x)$ i raoneu quins són els nombres x tals que $x^2 - 2x - 3 < 0$.

a) • $\boxed{\text{Funció } g(x) = -\frac{3}{2}\,x}$

–Tall OX: $g(x) = 0 \Longrightarrow -\dfrac{3}{2} \cdot x = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3} \cdot 0 = 0$

–Tall OY: $x = 0 \Longrightarrow g(0) = -\dfrac{3}{2} \cdot 0 = 0$

–Només talla els eixos en el punt$(0, 0)$. Per dibuixar el gràfic, calcularem la imatge d'un altre punt qualsevol, per exemple $f(-2) = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3$.

• $\boxed{\text{Funció } f(x) = x^2 - 2x - 3}$

–Talls OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1. \end{array}\right.$

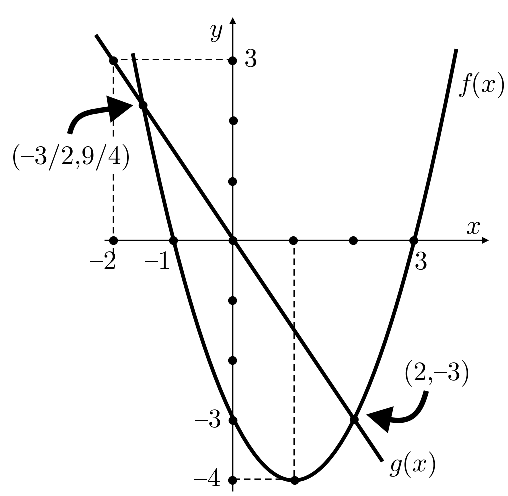
–Tall OY: $x = 0 \Longleftrightarrow f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$

–Els talls amb els eixos són els punts $(3, 0)$, $(-1, 0)$ i $(0, -3)$.

–L'abscissa del vèrtex es troba en el punt mitjà dels dos punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses:

$$x_v = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad y_v = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4 \Longrightarrow \text{Vèrtex} = (1, -4).$$

b)



c) Els punts d'intersecció dels dos gràfics venen determinats per la condició $f(x) = g(x)$:

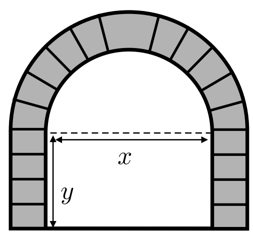
$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 2x - 3 = -\frac{3}{2}x \iff 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \Longrightarrow g(2) = -3 \\ -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow g\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Els punts d'intersecció són $\boxed{(2, -3) \quad \text{i} \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}$.

d) Les solucions s'obtenen de les abscisses x dels punts del gràfic de f tals que la seva ordenada $f(x)$ és negativa. És a dir dels punts del gràfic de f que es troben en el semiplà d'ordenada negativa. Per tant, la solució la conformen els nombres x tals que $\boxed{-1 < x < 3}$.

2. Considerem els arcs de mig punt del tipus de la figura adjunta. La seva part interior està constituïda per un rectangle de costats x, y i un semicercle de radi $\frac{x}{2}$. Se sap que el perímetre del rectangle és de 24 m.



a) Cerqueu l'àrea $A(x)$ de la part interior en funció de la longitud x del costat del rectangle i comproveu que és
$$A(x) = \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)x^2 + 12x.$$

b) El gràfic de la funció $A(x)$ és una paràbola. Dibuixeu-la a partir dels dos punts de tall amb l'eix d'abscisses i el seu vèrtex, (aproximeu els càlculs amb un decimal).

c) Raoneu quins són els valors de x i y que proporcionen l'àrea interior màxima.

a) De les fórmules del perímetre i de l'àrea d'un rectangle i de l'àrea d'un cercle obtenim

$$\left.\begin{array}{r} \text{Àrea} = x \cdot y + \dfrac{1}{2}\left[\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right] \\ 2x + 2y = 24 \Longrightarrow x + y = 12 \end{array}\right\} \Longrightarrow A(x) = x(12 - x) + \frac{\pi x^2}{2 \cdot 4} \Longrightarrow A(x) = 12x - x^2 + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A(x) = \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)x^2 + 12x},$$

en què els valors possibles de la variable x es troben entre 0 i 12.

b) En els punts en què el gràfic d'$A(x)$ talla l'eix d'abscisses, l'ordenada és igual a 0. Llavors,

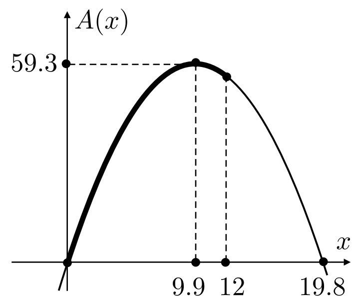
$$A(x) = 0 \iff \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)x^2 + 12x \iff x\left[\left(\frac{\pi}{8} - 1\right)x + 12\right] = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)x + 12 = 0 \iff x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{-12}{\frac{\pi}{8} - 1} = \frac{96}{8 - \pi} \approx 19.8$$

Per trobar l'abscissa x_v del vèrtex calculem el punt mitjà dels dos punts de tall anteriors:

$$x_v = \frac{0 + \frac{96}{8-\pi}}{2} = \frac{48}{8-\pi} \approx 9.9 \Longrightarrow A(x_v) \approx A(9.9) \approx 59.3 \text{ m}^2.$$

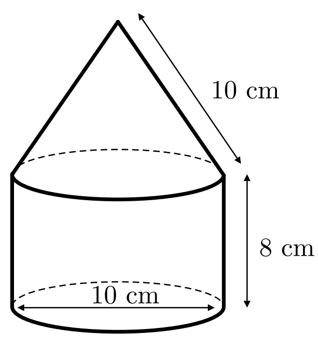
De tot això en resulta el gràfic,



c) De l'observació del gràfic anterior establim que l'àrea màxima ve representada per l'ordenada del vèrtex amb valor 59.3 m^2. Aquest àrea s'assoleix quan

$$\boxed{x \approx 9.9 \quad \text{i} \quad y \approx 12 - 9.9 = 2.1}.$$

3. Calculeu el volum de la figura adjunta



Calcularem el volum del cilindre de radi 5 i altura 8 i li sumarem el volum del con de radi 5 i generatriu 10. Pel teorema de Pitàgoras sabem que l'altura d'aquest con és igual a

$$\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

Llavors,

$$\text{Volum} = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 + \frac{\pi}{3} 5^2 \cdot 5\sqrt{3} = 25\pi\left(8 + \frac{\sqrt{75}}{3}\right) = \frac{25\pi}{3}(24 - 5\sqrt{3}) \approx \boxed{855.04345 \text{ cm}^3}.$$