1. Resoleu les equacions:

a) $x^2-9=0$
b) $(x+2)^2=0$
c) $x^2-5x+4=0$
d) $6x^2+7x-3=0$
e) $x(1-x)=\dfrac{x-15}{2}$
f) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x}=\dfrac{x+14}{3}$

a) $x^2-9=0\Longrightarrow x^2=9\Longrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Longrightarrow \boxed{x=\pm 3}$.

b) $(x+2)^2=0\Longrightarrow x+2=0\Longrightarrow \boxed{x=-2}$.

c) $x^2-5x+4=0\Longrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\boxed{4}\\ \boxed{1}\end{cases}$.

d) $6x^2+7x-3=0\Longrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+72}}{12}=\dfrac{-7\pm 11}{12}=\begin{cases}\dfrac{4}{12}=\boxed{\dfrac{1}{3}}\\ \dfrac{-18}{12}=\boxed{-\dfrac{3}{2}}\end{cases}$.

e) $x(1-x)=\dfrac{x-15}{2}\Longrightarrow x-x^2=\dfrac{x-15}{2}\Longrightarrow 2x-2x^2=x-15\Longrightarrow 2x^2-x-15=0$

$\Longrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\dfrac{1\pm 11}{4}=\begin{cases}\dfrac{12}{4}=\boxed{3}\\ \dfrac{-10}{4}=\boxed{-\dfrac{5}{2}}\end{cases}$.

f) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x}=\dfrac{x+14}{3}\Longrightarrow 3(x^2+2x-x-2)=x(x+14)$

$\Longrightarrow 3x^2+3x-6=x^2+14x\Longrightarrow 2x^2-11x-6=0$

$\Longrightarrow x=\dfrac{11\pm\sqrt{121+48}}{4}=\dfrac{11\pm 13}{4}=\begin{cases}\dfrac{24}{4}=\boxed{6}\\ \dfrac{-2}{4}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}\end{cases}$.

2. Considereu l'equació $y=x^2-2x-3$.

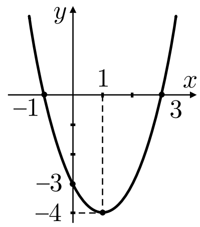
a) Calculeu els punts de tall amb els eixos de coordenades i el vèrtex del seu gràfic.
b) Utilitzeu els resultats anteriors per representar-la gràficament.
c) Observeu el gràfic obtingut i raoneu quins són els nombres x tals que $x^2-2x-3<0$.

a) Talls OX : $y=0\Longrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Longrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\ -1\end{cases}\Longrightarrow \boxed{(3,0)\text{ i }(-1,0)}$.

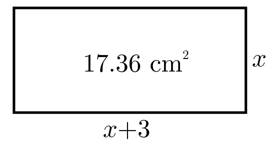
Tall OY : $x=0\Longrightarrow y=0^2-2\cdot 0-3=-3\Longrightarrow \boxed{(0,-3)}$.

Vèrtex : $x_v=\dfrac{3+(-1)}{2}=1\Longrightarrow y_v=1^2-2\cdot 1-3=-4\Longrightarrow \boxed{(1,-4)}$.

b) 

c) En el gràfic observem que tots els nombres x que es troben entre -1 i 3, a l'eix OX, tenen la seva imatge $y = x^2 - 2x - 3$ en la part negativa de l'eix OY. Per tant, $x^2 - 2x - 3 < 0$ quan $\boxed{-1 < x < 3}$.

3. Trobeu els valors dels costats del rectangle que té àrea igual a 7.36 cm^2, si sabem que un costat és 3 cm més llarg que l'altre.



Si anomenem x la longitud del costat menor, la longitud del costat major serà $x + 3$. Llavors, segons la condició de l'enunciat,

$$x(x+3) = 7.36 \Longrightarrow x^2 + 3x - 7.36 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 29.44}}{2} = \frac{-3 \pm 6.2}{2} = \begin{cases} 1.6 \\ -4.6 \end{cases}$$

Per tant, els costats del rectangle mesuren (la solució negativa no és admissible),

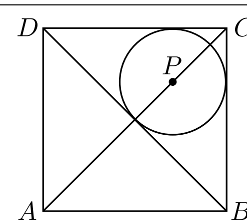
$$x = \boxed{1.6 \text{ cm}} \quad \text{i} \quad x + 3 = \boxed{4.6 \text{ cm}}.$$

- **Trieu i resoleu una de les dues qüestions següents:**

4A. Observeu la figura adjunta en què $ABCD$ és un quadrat de costat 1 cm.

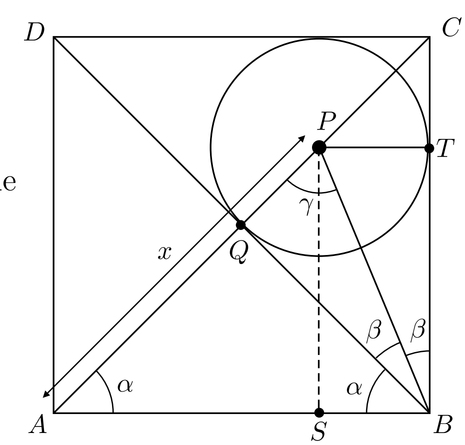
a) Quina estratègia seguiríeu per trobar la distància AP.

b) Com demostraríeu que el resultat obtingut és exacte?



En aquest exercici no es tractava tant de trobar solucions com de pensar alguna estratègia d'atac que si era aproximada necessitava que fos apuntat un camí de justificació del resultat que es pogués obtenir. A continuació no es presenten possibles estratègies sinó resolucions a partir de diferents estratègies d'observació. La primera estrictament geomètrica i les altres dues que parteixen del terreny geomètric per desembocar en el terreny algèbric.

★ Resolució I, per observació d'angles



En la figura adjunta, notem que:

⋆ $\alpha = 45°$.

⋆ $\beta = \dfrac{45°}{2} = 22°\,30'$, perquè el segment BP és bisectriu de l'angle $\angle QBT$, en ser $\triangle QBP = \triangle TBP$.

⋆ $\angle ABP = \alpha + \beta = 45° + 22°30' = 67°30'$.

⋆ $\angle APB = \gamma = 180° - 45° - 67°30' = 67°30'$

Per tant, $\triangle ABP$ és isòsceles i $\boxed{AP = AB = 1 \text{ cm}}$.

★ Resolució II, per observació de la semblança de triangles

Els triangles $\triangle APS$ i $\triangle ACB$ tenen els seus angles iguals per parelles. Per tant, els costats són proporcionals i, si anomenem $x = AP$, observem que:

- $\star\ \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AS}{AB}\,.$
- $\star\ AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ i $AQ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$
- $\star\ AS = AB - SB = 1 - PT = 1 - PQ = 1 - \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Llavors, obtenim

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \implies x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,x + 1 \implies x + \sqrt{2}\,x = 1 + \sqrt{2}$$
$$\implies (1+\sqrt{2})x = 1 + \sqrt{2} \implies \boxed{x = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1 \text{ cm}}\,.$$

★ Resolució III, per aplicació del teorema de Pitàgoras

El triangle $\triangle PTC$ és rectangle. Per tant,

$$\left(\sqrt{2} - x\right)^2 = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \implies 2 - 2\sqrt{2}\,x + x^2 = 2\left(x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\right)$$
$$\implies 2 + x^2 = 2x^2 + 1 \implies x^2 = 1 \implies \boxed{x = 1 \text{ cm}}\,.$$

4B. El gràfic de $y = x^2 - ax$ passa pel punt $(4, 10)$.

a) Trobeu el valor d'a.

b) Trobeu les coordenades del vèrtex de la paràbola que en resulta.

a) Si el punt $(4, 10)$ pertany a la paràbola llavors,

$$10 = 4^2 - 4a \implies -6 = -4a \implies a = \frac{-6}{-4} \implies \boxed{a = \frac{3}{2}}\,.$$

b) Primer calculem els talls amb l'eix de les abscisses:

$$y = 0 \iff x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \iff x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \iff x = 0,\ x = \frac{3}{2}\,.$$

Llavors, per a les coordenades del vèrtex tindrem

$$x_v = \frac{0 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \implies y_v = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = -\frac{9}{16}\,.$$

Per tant el vèrtex és el punt $\boxed{\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{16}\right)}$.