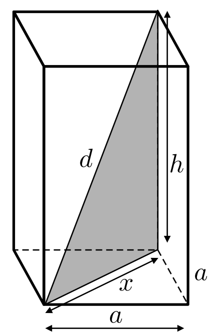
1. Digueu si són vertaderes o falses les afirmacions següents, encerclant **V** o **F** respectivament.

- Hi ha tres poliedres diferents en què les cares són triangles equilàters. **V** F
- Una piràmide hexagonal regular té 12 arestes i 7 vèrtexs. **V** F
- Existeix un poliedre tal que en cada vèrtex incideixen tres octàgons regulars. V **F**
- Dos plans diferents sempre es tallen en una recta. V **F**
- Si un cilindre A té diàmetre doble que un cilindre B i l'altura d'A és igual a l'altura de B, llavors el volum d'A és el doble que el volum de B. V **F**
- La fórmula d'Euler estableix que en qualsevol poliedre, el nombre de cares més el nombre d'arestes és igual a dues vegades el nombre de vèrtexs. V **F**
- La superfície d'un con és igual a la tercera part de la superfície d'un cilindre amb la mateixa base i la mateixa altura. V **F**
- En cada vèrtex d'un icosaedre incideixen cinc triangles equilàters. **V** F
- Si un cub A té l'aresta de longitud doble que l'aresta d'un cub B, llavors el volum d'A és vuit vegades el volum de B. **V** F
- El volum d'un tronc de con es pot calcular a partir de la seva altura i els diàmetres de les seves bases. **V** F
- Per un punt exterior a un pla es poden traçar un nombre infinit de rectes que no incideixen amb aquest pla. **V** F
- Qualsevol segment que uneix el vèrtex d'un con amb un punt del perímetre de la base és una generatriu del con. **V** F

2. El volum d'un prisma regular quadrangular és 540 cm^3. Si el costat de la base mesura 6 cm, calculeu la diagonal del prisma.

Observem que la diagonal d d'un prisma quadrangular regular s'obté aplicant dues vegades el teorema de Pitàgoras,

$$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \sqrt{2a^2 + h^2}\,.$$



Per tant, l'únic que cal esbrinar és l'altura h a partir del volum que ens dóna l'enunciat,

$$540 = \text{ Volum } = 6^2 \cdot h \Longrightarrow h = \frac{540}{36} = 15 \text{ cm}.$$

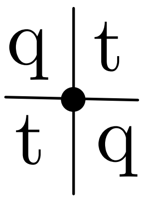
Finalment, $$d = \sqrt{2 \cdot 6^2 + 15^2} = \sqrt{297} \approx \boxed{17.234 \text{ cm}}.$$

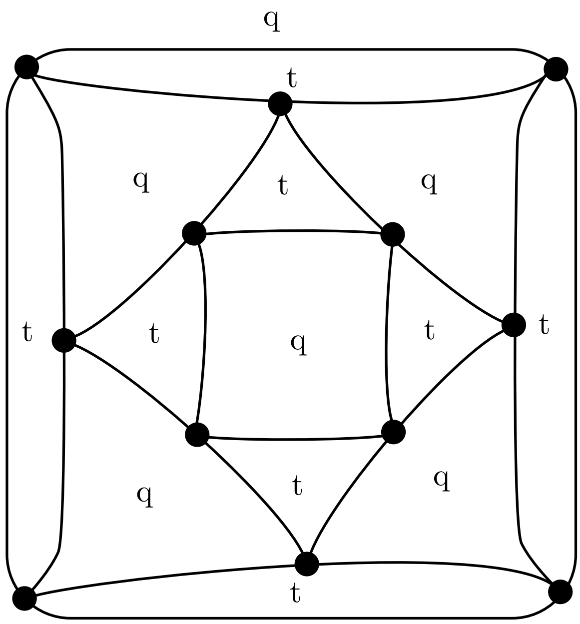
3. En cada vèrtex d'un poliedre incideixen, —amb aquest ordre—, un triangle, un quadrat, un triangle i un quadrat.

a) Feu-ne el diagrama d'Schlegel.

b) Feu el recompte del seu nombre de cares, vèrtexs i arestes.

a)





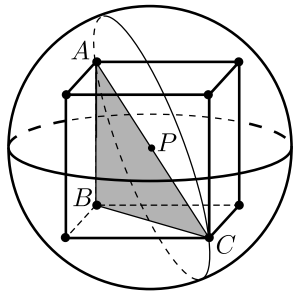
b) Fem recompte sobre el diagrama i s'obtenen

$$\boxed{\begin{array}{c} 8\ \text{t} + 6\ \text{q} = 14\ \text{cares} \\ 12\ \text{vèrtexs} \\ 24\ \text{arestes} \end{array}}$$

Comprovem que se satisfà la fórmula d'Euler:

$$14 + 12 = 24 + 2.$$

4. En una esfera de volum $36000\,\pi$ cm^3 inscrivim un cub. Calculeu el volum del cub.
Indicació:En la figura s'observa que el diàmetre de l'esfera és igual a la diagonal del cub i que els vèrtexs del cub toquen la superfície de l'esfera.



Si anomenem x el costat del cub, pel mateix raonament que al principi del problema anterior obtenim

$$AC = \sqrt{3\,x^2}. \tag{1}$$

Així només cal trobar la diagonal AC del cub, la qual coincideix amb el diàmetre de l'esfera. Per aconseguir aquest objectiu calculem el radi de l'esfera a a partir del volum.

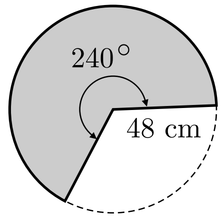
$$36000\,\pi = \text{ Volum } = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \Longrightarrow R^3 = \frac{3\cdot 36000}{4} = 27000 \text{ cm}^3$$
$$\Longrightarrow AC = 2\,R = 2\cdot\sqrt[3]{27000} = 2\cdot 30 = 60 \text{ cm}.$$

Finalment. per la igualtat (1), s'obté

$$60 = \sqrt{3\,x^2} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{60^2}{3}} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$$
$$\Longrightarrow \text{Volum(cub) } = x^3 = \left(\sqrt{1200}\right)^3 \approx \boxed{41569.22 \text{ cm}^3}.$$

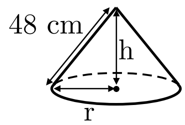
5. Amb un sector circular de radi 48 cm i 240° d'angle central construïm la superfície lateral d'un con. Calculeu la seva capacitat en litres.

Cal trobar el radi i l'altura del con. El primer el podem trobar a partir de la longitud de l'arc determinat pel sector, el qual és les dues terceres parts del perímetre de la circumferència. L'altura la podrem calcular amb l'ajut del teorema de Pitàgoras.



- **radi**

$$\text{Perímetre(base con)} = \text{Longitud}\,(\text{arc}_{240°}) = \frac{2}{3}\,2\,\pi\cdot 48 = 64\,\pi$$
$$\Longrightarrow 2\,\pi\,r = 64\,\pi \Longrightarrow r = \frac{64}{2} = 32 \text{ cm.}$$



- **altura i volum**

$$h = \sqrt{48^2 - 32^2} = \sqrt{1280} = 16\sqrt{5} \text{ cm}$$
$$\Longrightarrow \text{Volum} = \frac{\pi}{3}\,r^2\cdot h = \frac{\pi\,32^2\cdot 16\,\sqrt{5}}{3} \approx 38364.85 \text{ cm}^3 \approx \boxed{38.36 \text{ litres}}.$$

6. Resoleu: a) $3x^2-10x+23 = (x+42)(x+9)$. b) $\dfrac{x+3}{8} = 5\cdot\dfrac{x-2}{6} - \dfrac{x+3}{4}$.

a) $3x^2 - 10x + 23 = x^2 + 51x + 378 \Longrightarrow 2x^2 - 61x - 355 = 0$

$$\Longrightarrow x = \frac{61 \pm \sqrt{3721 + 2840}}{4} = \frac{61 \pm 81}{4} = \begin{cases} \dfrac{142}{4} = \boxed{\dfrac{71}{2}} \\[2ex] -\dfrac{20}{4} = \boxed{-5} \end{cases}$$

b) Multipliquem els dos membres de la igualtat per $\text{mcm}(8,6,4) = 24$ i s'obté,

$$3(x+3) = 20(x-2) - 6(x+3)$$
$$\Longrightarrow \quad 3x + 9 = 20x - 40 - 6x - 18 \Longrightarrow 3x + 9 = 14x - 58$$
$$\Longrightarrow \quad -11x = -67 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{67}{11}}.$$