

1. Demostreu que  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = x \iff a = x^n \\ \sqrt[n]{b} = y \iff b = y^n \end{array} \right\} \iff \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{x^n y^n} = \sqrt[n]{(xy)^n} = xy = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals):

a)  $\frac{3\sqrt{32}}{2} + \frac{9}{\sqrt{18}} - \sqrt[4]{324}.$

b)  $\frac{\sqrt[3]{a^{232}} \sqrt[5]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a}}.$

c)  $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}.$

a)  $\frac{3 \cdot 4\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{3\sqrt{2}} - \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{4} = 6\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \left(3 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} = \boxed{\frac{9\sqrt{2}}{2}}.$

b)  $a^{\frac{232}{3}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = a^{\frac{2320+6+3-10}{30}} = a^{\frac{2319}{30}} = a^{\frac{2319}{30}} = \sqrt[30]{a^{2319}} = a^{77} \sqrt[30]{a^9} = \boxed{a^{77} \sqrt[10]{a^3}}.$

c)  $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-2(-3 + \sqrt{5})}{-4} = \boxed{\frac{\sqrt{5} - 3}{2}}.$

3. Resoleu les equacions i el sistema següents:

a)  $35x^2 + 16x - 3 = 0.$

b)  $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0.$

c)  $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 24 \\ 3xy = 35. \end{cases}$

a)  $x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 420}}{70} = \frac{-16 \pm 26}{70} = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{7}} \\ \boxed{-\frac{3}{5}} \end{cases}.$

b)  $\left. \begin{array}{l} 8x^6 + 7x^3 - 1 = 0 \\ x^3 = z \end{array} \right\} \implies 8z^2 + 7z - 1 = 0 \implies z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} =$   
 $= \frac{-7 \pm 9}{16} = \begin{cases} \frac{1}{8} \\ -1 \end{cases} \implies x = \sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{-1} = \boxed{-1} \end{cases}.$

$$c) \quad x^2 - \frac{35^2}{x^2} = 24 \iff x^4 - 24x^2 - 1225 = 0 \iff x^2 = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 4900}}{2} =$$

$$= \frac{24 \pm 74}{2} = \left\langle \begin{array}{c} 49 \\ -25 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 7 \longrightarrow y = \frac{5}{3} \\ x = -7 \longrightarrow y = -\frac{5}{3} \end{array}}.$$

4. Tenim tres aixetes  $A$ ,  $B$  i  $C$  que aboquen aigua en un mateix dipòsit. Si s'obren al mateix temps tarden 3 h 20 min en omplir el dipòsit. L'aixeta  $C$  l'omple, si s'obre sola, en 10 h. L'aixeta  $A$  tardaria en omplir-lo, si s'obra sola, 3 hores menys que l'aixeta  $B$ , si s'obre sola. Calculeu el temps, en hores, minuts i segons, que tarda  $A$  en omplir el dipòsit si s'obre sola.

$x$  = nombre d'hores que tarda l'aixeta  $A$  en omplir el dipòsit.

$x + 3$  = nombre d'hores que tarda l'aixeta  $B$  en omplir el dipòsit.

En una hora tenim:

- L'aixeta  $A$  omple  $\frac{1}{x}$  de dipòsit.
- L'aixeta  $B$  omple  $\frac{1}{x+3}$  de dipòsit.
- L'aixeta  $C$  omple  $\frac{1}{10}$  de dipòsit.
- Les tres juntes omplen  $\frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$  de dipòsit.

De tot això resulta l'equació:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}.$$

Si multipliquem els dos membres per  $5x(x+3)$  en resulta:

$$\begin{aligned} 5x + 15 + 5x &= x^2 + 3x \iff x^2 - 7x - 15 = 0 \iff x = \frac{7 + \sqrt{49 + 60}}{2} = \\ &= \frac{7 + 10.44031}{2} = 8.72016 = \boxed{8 \text{ h } 43 \text{ min } 12.6 \text{ s.}} \end{aligned}$$