IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C   Puntuació: $2 + (1 + 1) + 1 + (1 + 0.5) + 1 + (3 \cdot 0.5 + 1)$
Combinatòria, probabilitat i estadística   5/XII/2002

1. El nombre de triangles que tenen els vèrtexs en els vèrtexs d'un polígon regular és igual a 92 vegades el nombre de vèrtexs d'aquest polígon. Calculeu el nombre de vèrtexs del polígon.

Sigui x = nombre de vèrtexs del polígon regular. Cada triangle resulta de l'elecció de tres vèrtexs diferents entre els x del polígon, de manera que l'ordre no importa. Per exemple, és el mateix el triangle de vèrtexs V_1, V_2, V_3 que el de vèrtexs V_2, V_1, V_3. O sigui que el nombre de triangles que es poden construir és igual al nombre de combinacions de x vèrtexs agafats de 3 en 3. Per tant, s'ha de resoldre l'equació:

$$\binom{x}{3} = 92x, \quad \text{és a dir,} \quad \frac{\cancel{x}(x-1)(x-2)}{6} = 92\cancel{x}, \quad \text{o també} \quad x^2 - 3x - 550 = 0.$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 550 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9 + 2200}{4}} = \frac{3 \pm 47}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ \boxed{25} \\ \searrow \ -\cancel{22} \end{array}$$

2. a) Calculeu: $\binom{2002}{2001} \cdot \mathrm{VR}_1^{2002} + \mathrm{PR}_{2002}^{2002}$.   b) Resoleu: $24\,\mathrm{C}_x^4 - \mathrm{V}_x^4 + \mathrm{VR}_x^4 = 256$.

a) $$\frac{2002 \cdot 2001!}{2001!\,1!} \cdot 1^{2002} + \frac{2002!}{2002!} = 2002 \cdot 1 + 1 = \boxed{2003}.$$

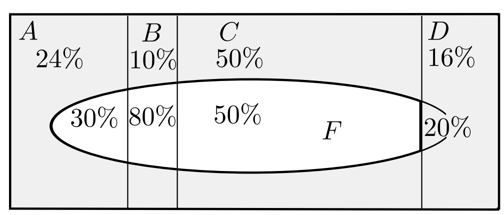
b) $$24\,\frac{\mathrm{V}_x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \mathrm{V}_x^4 + \mathrm{VR}_x^4 = 256 \iff \mathrm{V}_x^4 - \mathrm{V}_x^4 + \mathrm{VR}_x^4 = 256 \iff x^4 = 256 \iff \boxed{x = 4}.$$

3. Tenim una caixa plena de boles. El 24% són de color blanc, el 10% són de color negre, el 50% són de color groc, i la resta de color verd.

El 30% de les blanques, el 80% de les negres, el 50% de les grogues i el 20% de les verdes estan foradades.

Calculeu la probabilitat que una bola triada a l'atzar <u>no</u> estigui foradada o sigui verda.

Sigui:
A = Boles de color blanc.
B = Boles de color negre.
C = Boles de color groc.
D = Boles de color verd.
F = Boles foradades.
Llavors, si observem el gràfic adjunt:



$$P(\overline{F} \text{ o } V) = 1 - P(F \text{ i } B) - P(F \text{ i } N) - P(F \text{ i } G) = 1 - \frac{30 \cdot 24}{10000} - \frac{80 \cdot 10}{10000} - \frac{50 \cdot 50}{10000} = \boxed{0.598}.$$

4. Fem tirades de sis monedes i sabem que hi ha la mateixa probabilitat de treure cara que de treure creu en cadascuna de les monedes.

a) Calculeu la probabilitat que en una tirada surtin 3 cares i 3 creus.

b) Després de 5000 tirades, al voltant de quin nombre de vegades podem esperar que hagin sortit 3 cares i 3 creus?

a) **Casos possibles:** Si comptem el nombre de col·leccions ordenades dels símbols $\bigcirc$, $+$ agafats de sis en sis, que es poden construir de manera que es puguin repetir de 1 a 6 cops, obtenim tots els casos possibles equiprobables. En resulten VR_2^6.

Casos favorables: De les col·leccions anteriors hem de considerar aquelles en què ◯ es repeteix tres vegades i + es repeteix tres vegades. En resulten $\mathrm{PR}_6^{3,3}$.

Llavors, la probabilitat és $\dfrac{\mathrm{PR}_6^{3,3}}{\mathrm{VR}_2^6} = \dfrac{\frac{6!}{3!\,3!}}{2^6} = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16} = \boxed{0.3125}$.

b) La probabilitat d'un esdeveniment resultant d'una experiència aleatòria prediu, de manera aproximada, el percentatge de casos que aquest esdevindrà. En el nostre cas, en 5000 tirades dels 6 daus podem esperar que sortiran 3 cares i 3 creus en, aproximadament,

$$5000 \cdot 0.3125 \approx \boxed{1563 \text{ tirades}}.$$

5. En un país les matrícules dels cotxes es formen amb quatre xifres que es poden repetir triades entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, i tres lletres. Aquestes últimes es trien entre

B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, X, Y, Z,

i no n´hi poden haver dues d'iguals juntes. Per exemple, 0402-KPS i 0402-KPK són vàlides, però no ho és 0402-KKP.
Calculeu quantes matrícules diferents es poden formar.

Per cada elecció dels grups de tres lletres es poden formar tantes matrícules com nombres hi ha des del 0000 fins el 9999. És a dir 10000 matrícules. Ara, cal fer el recompte del nombre d'agrupacions de tres lletres que es poden construir amb les condicions donades:

Les dues primeres lletres han de ser diferents i el seu ordre és important; per exemple, les matrícules del tipus BL_ són diferents que les del tipus LB_. A la posició que falta hi pot anar qualsevol lletra, mentre sigui diferent que la que hi ha al mig. Per tant, en haver-hi 21 lletres, tenim que el nombre d'agrupacions de tres lletres és $\mathrm{V}_{21}^2 \cdot 20$. Finalment el nombre de matrícules és:

$$10000 \cdot \mathrm{V}_{21}^2 \cdot 20 = 10000 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 20 = \boxed{84000000}.$$

6. En una fàbrica de bombetes volen estudiar el temps en hores que un determinat model de bombeta pot estar en funcionament. Trien una col·lecció de 200 bombetes d'aquest model i obtenen la distribució de freqüències adjunta.

x_i	f_i
0 − 10	12
10 − 20	30
20 − 30	90
30 − 40	54
40 − 50	14

a) Quines són la població, la mostra i la variable estadística?

b) Elaboreu una taula amb els valors de: m_i, f_i, $m_i \cdot f_i$, m_i^2, $m_i^2 \cdot f_i$. Sota de les columnes corresponents, poseu els valors de: $\sum f_i$, $\sum m_i \cdot f_i$, $\sum m_i^2 \cdot f_i$.

c) Representeu l'histograma de freqüències i el de freqüències acumulades.

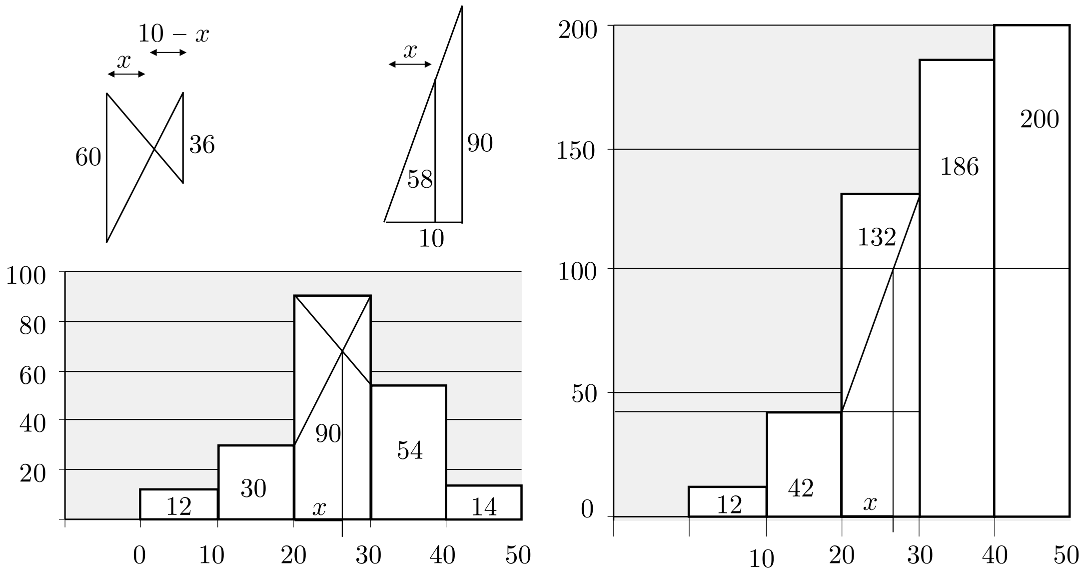
d) Calculeu el mode, la mediana, la mitjana aritmètica i la desviació típica.

a) Població: Totes les bombetes del model determinat.
Mostra: Les 200 bombetes triades aleatòriament.
Variable estadística: Temps de funcionament en hores.

b) La taula demanada és:

x_i	m_i	f_i	$m_i \cdot f_i$	m_i^2	$m_i^2 \cdot f_i$
0–10	5	12	60	25	300
10–20	15	30	450	225	6750
20–30	25	90	2250	625	56250
30–40	35	54	1890	1225	66150
40–50	45	14	630	2025	28350
		200	5280		157800

c) i d) Histogrames de freqüències i freqüències acumulades:



- Mitjana aritmètica i desviació típica:

$$\overline{x} = \frac{5280}{200} = \boxed{26.4}; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{157800}{200} - 26.4^2} = \sqrt{95.04} \approx \boxed{9.594}.$$

- Mode (observeu el gràfic adjunt):

$$\frac{x}{60} = \frac{10-x}{36} \Longleftrightarrow 36x = 600 - 60x \Longleftrightarrow x = \frac{600}{96} = 6.25 \Longleftrightarrow \text{Mode} = \boxed{26.25}.$$

- Mediana (observeu el gràfic adjunt):

$$\frac{x}{10} = \frac{58}{90} \Longleftrightarrow 90x = 580 \Longleftrightarrow x = \frac{58}{9} = 6,44 \Longleftrightarrow \text{Mode} = \boxed{26.44}.$$