IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 4t ESO C 15/V/2003
Nombres, equacions i funcions
Recuperació $(0.8+0.8)+(1.4+1.4)+2+(0.8+1.6+1.2)$

1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. (El resultat s'ha d'expressar sense exponents fraccionaris ni negatius. Tampoc s'han d'utilitzar nombres decimals):

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}\ \sqrt[10]{x^3}}{\sqrt{x^5}}$.

b) $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

a) $x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{3}{10}-\frac{5}{2}} = x^{\frac{15+5+18-150}{60}} = x^{-\frac{112}{60}} = \dfrac{1}{\sqrt[60]{x^{112}}}\,\dfrac{\sqrt[60]{x^8}}{\sqrt[60]{x^8}} = \dfrac{\sqrt[60]{x^8}}{x^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt[15]{x^2}}{x^2}}$

b) $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{18+6\sqrt{5}+6\sqrt{5}+10}{9-5} = \dfrac{28+12\sqrt{5}}{4} = \boxed{7+3\sqrt{5}}$.

2. Resoleu les equacions:

a) $4x^4+11x^2-3=0$.

b) $\dfrac{x}{2}-\sqrt{3x+6}=\dfrac{x}{10}-2$.

a) $x^2 = \dfrac{-11\pm\sqrt{121+48}}{8} = \dfrac{-11\pm 13}{8} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ -3 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{cases} \boxed{\pm\dfrac{1}{2}} \\ \sqrt{-3} \quad \text{No existeix.} \end{cases}$

b)

$$\begin{aligned} 5x-10\sqrt{3x+6}=x-20 &\Longrightarrow 10\sqrt{3x+26}=4x+20 \Longrightarrow 5\sqrt{3x+26}=2x+10 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 25(3x+6)=4x^2+40x+100 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 4x^2-35x-50=0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow x=\frac{35\pm\sqrt{1225+800}}{8}=\frac{35\pm 45}{8}=\begin{cases} \boxed{10} \\ -\dfrac{10}{8}=\boxed{-\dfrac{5}{4}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Comprovació: Les dues solucions són bones perquè

$x=10 \Longrightarrow 5-\sqrt{36}=5-6=-1=\dfrac{10}{10}-2$.

$x=-\dfrac{5}{4} \Longrightarrow -\dfrac{5}{8}-\sqrt{6-\dfrac{15}{4}}=-\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{17}{8}$ i $-\dfrac{5}{40}-2=-\dfrac{85}{40}=-\dfrac{17}{8}$.

3. L'àrea d'un rectangle és igual a 1848 cm^2, i la seva diagonal mesura 65 cm. Calculeu el seu perímetre.

x = longitud d'un costat del rectangle.
y = longitud de l'altre costat del rectangle.

$$\left.\begin{array}{r} xy = 1848 \\ x^2 + y^2 = 65^2 \end{array}\right\} \iff x^2 + \frac{1848^2}{x^2} = 65^2 \iff x^4 + 65^2x^2 - 60 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{4225 \pm \sqrt{65^4 - 4 \cdot 1848^2}}{2} = \frac{4225 \pm 2047}{2} = \begin{cases} 3136 \\ 1089 \end{cases} \iff$$

$$\iff x = \begin{cases} \sqrt{3136} = 56 \Longrightarrow y = \dfrac{1848}{56} = 33 \\ \sqrt{1089} = 33 \Longrightarrow y = \dfrac{1848}{33} = 56. \end{cases}$$

No considerem les arrels negatives. En els dos casos resulta el mateix rectangle i el seu perímetre mesura

$$2 \cdot 33 + 2 \cdot 56 = \boxed{178 \text{ cm}}.$$

4. Considereu la funció $f(x) = 4x^2 - 4x$ i el punt $P(0, -4)$.

a) Trobeu els punts de tall del gràfic de f amb els eixos de coordenades, i el seu vèrtex.

b) Trobeu les dues funcions afins tals que el seu gràfic passa pel punt P i és tangent al gràfic de f.

c) Representeu f i les funcions afins trobades gràficament en uns mateixos eixos.

a) Talls OX:
$0 = f(x) = 4x^2 - 4x \iff 4x(x-1) = 0 \iff x = 0$ o $x = 1$. Punts $\boxed{(0,0)\ ,\ (1,0)}$.
Talls OY: $f(0) = 0$. Punt $\boxed{(0,0)}$.
Vèrtex: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{8} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y_v = 4 \cdot \dfrac{1}{4} - 4 \cdot \dfrac{1}{2}$. Punt $\boxed{\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ -1\right)}$.

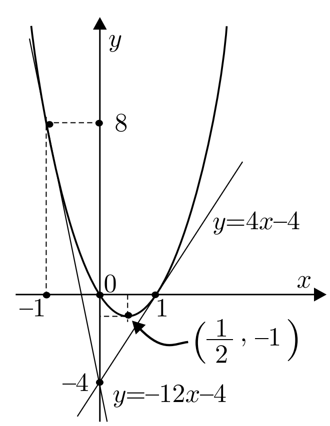
b) Per tal que les rectes buscades tinguin un únic punt de contacte amb la paràbola, imposem que el sistema d'equacions que proporciona els punts de contacte,

$$\left.\begin{array}{l} y = mx - 4 \\ y = 4x^2 - 4x \end{array}\right\} \quad \text{tingui solució única. Llavors,}$$

$$mx - 4 = 4x^2 - 4x \iff 4x^2 - (4+m)x + 4 = 0$$

té solució única. Per tant,

$$(-(4+m))^2 - 64 = 0 \Longrightarrow 4 + m = \pm 8 \Longrightarrow m = \begin{cases} 4 \\ -12. \end{cases}$$



Les rectes buscades tenen equacions $\boxed{y = 4x - 4 \quad \text{i} \quad y = -12x - 4}$. Si cerquem els punts de tangència en resulten el $(-1, 8)$ i el $(1, 0)$.