1. Demostreu per reducció a l'absurd, que el producte d'un nombre racional diferent de zero, per un nombre irracional és un nombre irracional.

Siguin $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tal que $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Suposem que $a \cdot \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; llavors

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s}\,, \text{ tal que } r, s \in \mathbb{Z} - \{0\} \Longrightarrow a = \frac{r/s}{p/q} = \frac{r \cdot q}{p \cdot s}\,.$$

O sigui que a es pot presentar com una fracció d'enters, i això és una contradicció amb el fet que a és irracional. Per tant, $a \cdot \dfrac{p}{q} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals):

$$\frac{2\sqrt{243}}{3} - \frac{4}{\sqrt{12}} + \sqrt{1875}\,, \qquad \frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\,\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[4]{a^{13}}}\,, \qquad \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\,.$$

$$\frac{2\sqrt{243}}{3} - \frac{4}{\sqrt{12}} + \sqrt{1875} = \frac{2 \cdot 9\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{2\sqrt{3}} + 25\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 25\sqrt{3} =$$
$$= \left(31 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{3} = \boxed{\frac{91\sqrt{3}}{3}}\,.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\,\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[4]{a^{13}}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{3}-\frac{13}{4}} = a^{-\frac{13}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{13}}} \cdot \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \boxed{\frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{a^2}}\,.$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) =$$
$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}\,.$$

3. Resoleu:

a) $x^5 - 2x^3 - 168x = 0$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

a) $x^5 - 2x^3 - 168x = 0 \Longleftrightarrow x(x^4 - 2x^2 - 168) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o bé $x^4 - 2x^2 - 168 = 0$. En aquest últim cas considerem la incògnita $z = x^2$, llavors $z^2 = (x^2)^2 = x^4$ i tenim:

$$z^2 - 2z - 168 = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 672}}{2} = \frac{2 \pm 26}{2} = \begin{cases} 14 \\ -12. \end{cases}$$

De tot això obtenim les solucions $\boxed{x = 0,\ x = \sqrt{14},\ x = -\sqrt{14}}$. El cas $x^2 = -12$ no genera cap solució real.

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \iff x^2 - 25 - 4x^2 + 20x = 7 \iff 3x^2 - 20x + 32 = 0 \iff$

$$\iff x = \frac{20 \pm \sqrt{400-384}}{6} = \frac{20 \pm 4}{6} = \begin{cases} \boxed{x = 4 \implies y = -3} \\ \boxed{x = \dfrac{8}{3} \implies y = -\dfrac{1}{3}\,.} \end{cases}$$

4. Suposo que heu comprovat que el problema de les aixetes plantejat a classe dóna pas a l'equació

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}\,,$$

en què x és el nombre d'hores que tarda l'aixeta amb més flux, en omplir el dipòsit. Resoleu aquesta equació i expresseu el resultat x en hores, minuts i segons.

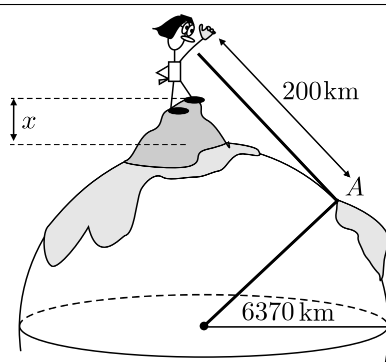
Multipliquem els dos costats de l'equació pel comú denominador $4x(x+3)$:

$$4(x+3) + 4x = x(x+3) \iff 8x + 12 = x^2 + 3x \iff x^2 - 5x - 12 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{5 \pm \sqrt{25+48}}{2} \approx \frac{5 \pm 8.544}{2} = 6.772 \text{ h} = \boxed{6 \text{ h } 46 \text{ min } 19 \text{ s}}\,.$$

S'ha prescindit de la solució negativa per no adaptar-se a les condicions de l'enunciat.

5. La Mercè va pujar al cim d'una muntanya. Des d'allí va poder observar la costa A d'una illa que es trobava a 200 km en línia recta. Quina era l'altura mínima x del cim al qual va pujar? [Suposeu que el radi de la Terra és de 6370 km.]



El punt A més llunyà que podem observar des d'un punt P elevat sobre el nivell del mar, ve determinat per la recta tangent des de P a l'esfera de la Terra. Això és així perquè les rectes secants tallen l'esfera en punts més propers a P que el punt A. Llavors si tracem des de A un segment AP de 200 km de longitud, tangent a l'esfera, la distància x de P a l'esfera determina l'altura mínima del cim de la muntanya sobre el nivell del mar. En ser aquest segment AP tangent a l'esfera, forma un angle de 90° amb el radi OA que toca en el punt A, en què O és el centre de l'esfera.

Llavors, si apliquem el teorema de Pitàgoras al triangle OAP, obtenim:

$$(6370 + x)^2 = 6370^2 + 200^2 \iff$$
$$\iff \quad 6370 + x = \sqrt{40616900} \iff$$
$$\iff \quad x \approx 6373.1389 \text{ km} - 6370 \text{ km} \iff$$
$$\iff \quad \boxed{x \approx 3138.9 \text{ m}}$$