IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C — 15/V/2003
Polinomis – I — $(1+1)+3+1+2$

---

1. Sigui el polinomi $p(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 18$.

a) Trobeu la seva descomposició en factors primers.

b) Trobeu els valors de x tals que $p(x) < 0$, a partir dels gràfics que resulten de la descomposició factorial.

a) Apliquem la regla de Paolo Ruffini (1765–1822), per trobar el primer factor. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -18 d'aquest polinomi.

	2	1	−15	−18
3		6	21	18
	2	7	6	0

Una primera descomposició del polinomi és

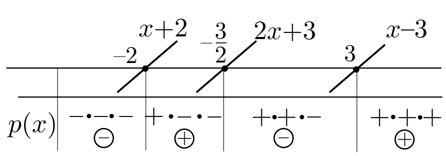
$$p(x) = (x-3)(2x^2+7x-6).$$

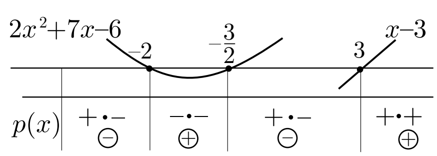
Buscarem les arrels del segon factor, la qual cosa permetrà donar la descomposició final:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -\dfrac{3}{2} \end{matrix} \right\} \Longrightarrow 2x^2+7x-6 = 2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

Conseqüentment, $\boxed{p(x) = (x-3)(x+2)(2x+3)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi del signe dels tres factors per separat i, alternativament, dels dos factors de la primera descomposició:





D'aquí en resulta que $p(x) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{x < -2 \quad \text{o} \quad -\dfrac{3}{2} < x < 3}$.

2. Doneu la definició de divisió entre dos polinomis $p(x)$ i $d(x)$. A continuació, calculeu de dues maneres diferents el resultat de dividir

$$p(x) = x^4 - 8x^2 + x + 7 \quad \text{entre} \quad d(x) = x^2 - 2x.$$

Donats els polinomis $p(x)$ i $d(x)$ existeixen dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ tals que:

1) $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
2) $0 \leq \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(d(x))$

- Càlcul de la divisió mitjançant l'algoritme clàssic:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -\,8x^2 & +\;x & +\;7 & x^2 - 2x \\ \cline{6-6}
-x^4 & +\,2x^3 & & & & x^2 + 2x - 4 \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & -\,8x^2 & & & \\
 & -\,2x^3 & +\,4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -\,4x^2 & +\;x & & \\
 & & 4x^2 & -\,8x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -\,7x & +\;7 &
\end{array}
$$

- Càlcul de la divisió mitjançant la definició:

Observem que el grau del quocient ha de ser $4-2=2$ i el del residu ha de ser menor que 2. A més, en el quocient el coeficient de grau 2 ha de ser $\frac{1}{1}=1$. Llavors,

$$x^4-8x^2+x+7=(x^2-2x)(x^2+bx+c)+(mx+s)=x^4+(b-2)x^3+(c-2b)x^2+(m-2c)x+s.$$

Per tant, si igualem els coeficients dels termes de mateix grau, obtenim

$$\left.\begin{array}{l} b-2=0 \\ c-2b=-8 \\ m-2c=1 \\ s=7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b=2 \\ c=-8+2b=-4 \\ m=1+2c=-7 \\ s=7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} q(x)=x^2+2x-4 \\ r(x)=-7x+7 \end{array}}.$$

3. El polinomi $3x^5+kx^3+2x-7$ dividit entre el polinomi $x+2$ dóna residu igual a 25. Calculeu el valor de k.

Si $p(x)=x^5+kx^3+2x-7$, i apliquem el teorema del residu obtenim

$$\begin{aligned} 25=p(-2) &\iff 25=3(-2)^5+k(-2)^3+2(-2)-7=-96-8k-4-7 \\ &\iff 8k=-132 \iff \boxed{k=-\frac{33}{2}}. \end{aligned}$$

4. Opereu i simplifiqueu l'expressió $\quad \dfrac{3}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x^2+2x}-\dfrac{2}{x^2-4}.$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x=x(x-2) \\ x^2+2x=x(x+2) \\ x^2-4=(x+2)(x-2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{m.c.m.}(x^2-2x,x^2+2x,x^2-4)=x(x+2)(x-2)\,.$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4} &= \frac{3(x+2)+x-2-2x}{x(x+2)(x-2)}= \\ &= \frac{2x+4}{x(x+2)(x-2)}=\frac{2(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\boxed{\frac{2}{x(x-2)}}. \end{aligned}$$

Un exemple de divisió per Ruffini amb un divisor de grau>1.

Divisió de $p(x) = x^7 - x^2 + 8$ entre $d(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

	1	0	0	0	0	-1	0	8
-2		-2	4	-14	42	-130		
3			3	-6	21	-63	195	
-1				-1	2	-7	21	-65
	1	-2	7	-21	65	-201	216	-57

Així tenim:
$$\begin{cases} \text{Quocient:} & x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 21x + 65 \\ \text{Residu:} & -201x^2 + 216x - 57 \end{cases}$$