IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C
Combinatòria 14/X/2002

1. Resoleu l'equació $\dfrac{C_x^4}{11} = C_{x-2}^2$.

$$\frac{C_x^4}{11} = C_{x-2}^2 \iff \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{4\cdot 3\cdot \cancel{2}} = 11\,\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{2}} \iff \boxed{x^2 - x - 132 = 0} \iff$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 132 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+528}{4}} = \begin{array}{l} \nearrow \; 12 \\ \searrow \; \cancel{-11} \end{array}$$

La única solució és $\boxed{x = 12}$ perquè s'ha de complir $x \geq 4$.

2. Quants nombres de tres xifres diferents es poden construir. Es considera que la primera xifra és diferent de zero.

$1\,\_\,\_$:	Nombres que comencen amb 1.	$\longrightarrow$	Col·leccions de 9 elements agafats de 2 en 2, en què importa l'ordre i no hi ha repetició.	$104 \neq 140$. No s'admet 122.	V_9^2
$2\,\_\,\_$:	Nombres que comencen amb 2.	$\longrightarrow$	Col·leccions de 9 elements agafats de 2 en 2, en què importa l'ordre i no hi ha repetició.	$213 \neq 231$. No s'admet 255.	V_9^2

Fem el mateix amb els que comencen amb 3, 4, ..., 9. En total obtenim,

$$9 \cdot V_9^2 = 9 \cdot 9 \cdot 8 = \boxed{648 \text{ nombres de tres xifres diferents.}}$$

3. Considereu la paraula ENTREMALIAT.

a) Quantes paraules es poden construir canviant l'ordre de les seves lletres.

b) Quantes d'aquestes paraules tenen les sis consonants situades en les sis primeres posicions?

a) Hem de construir col·leccions de 11 lletres en què l'ordre és important i es repeteixen un nombre fix de vegades a cada col·lecció. Concretament,

$$E \longrightarrow 2,\ N \longrightarrow 1,\ T \longrightarrow 2,\ R \longrightarrow 1,\ M \longrightarrow 1,\ A \longrightarrow 2,\ L \longrightarrow 1,\ I \longrightarrow 1.$$

Per tant hem de calcular

$$PR_{11}^{2,2,2} = \frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{4.989.600 \text{ paraules.}}$$

b) Primerament farem el recompte del nombre de maneres de posar les consonants. Després comptarem el nombre de maneres de posar les vocals per cada manera de posar les consonants.

Quan posem les 6 consonants, importa l'ordre i es repeteixen un nombre fix de vegades. Concretament,

$$N \longrightarrow 1,\ T \longrightarrow 2,\ R \longrightarrow 1,\ M \longrightarrow 1,\ L \longrightarrow 1.$$

Per tant, obtenim $PR_6^2 = \dfrac{6!}{2!} = 360$ maneres de posar les consonants en els sis primers llocs.

Quan posem les 5 vocals en els llocs que queden, importa l'ordre i es poden repetir un nombre fix de vegades. Concretament,

$$E \longrightarrow 2,\ A \longrightarrow 2,\ I \longrightarrow 1.$$

Obtenim $PR_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$ maneres de posar les vocals per cada disposició de les consonants.

Finalment, només caldrà fer $360 \cdot 30 = \boxed{10.800 \text{ paraules}}$

> **4.** Explica amb un exemple de combinacions de 5 elements agafats de 2 en 2, com es dedueix la fórmula
> $$C_5^2 = \frac{V_5^2}{P_2}$$

Si considerem que el producte de lletres és commutatiu, un exemple el constitueixen els productes de dues lletres diferents, triades entre $a,\ b,\ c,\ d,\ e$.

Si tinguéssim en compte l'ordre obtindríem V_5^2. Però si tenim en compte que per a cada dues lletres existeixen $P_2 = 2! = 2$ permutacions iguals, —$a \cdot b = b \cdot a$—, cal fer la divisió $\frac{V_5^2}{P_2}$.

> **5.** Considereu les travesses de futbol, en què tracteu d'endevinar els resultats de 14 partits. Recordeu-ne el significat:
>
> **1** : Guanya l'equip que juga a casa.
> **X** : Empat.
> **2** : Guanya l'equip de fora.
>
> a) Quantes apostes es poden fer de manera que tinguin 10 vegades el **1** i els altres 4 resultats diferents de **1**?
>
> b) Quantes apostes es poden fer que tinguin un mínim de 10 vegades el **1**.

a) Primerament, escollirem col·leccions de 10 llocs, entre 14, en què hi posarem el **1**. Després situarem **X** i **2** en els 4 llocs que queden.

Quan triem els llocs per al **1**, l'ordre no és important i els llocs no es repeteixen. Per tant, obtenim

$$C_{14}^{10} = C_{14}^{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1.001 \text{ maneres de posar 10 vegades } \mathbf{1}.$$

Per cada manera de posar 10 uns, hem de posar **X** i **2** en grups de 4. L'ordre és important i es repeteixen un nombre no fix de vegades. Per tant, obtenim

$$VR_2^4 = 2^4 = 16 \text{ col·leccions de } \mathbf{X} \text{ i } \mathbf{2} \text{ per cada manera de posar els uns.}$$

Finalment, obtenim $1001 \cdot 16 = \boxed{16.016 \text{ apostes}}$

b) Per a la segona part, hem de comptar nombre de maneres de posar 10, 11, 12, 13 i 14 vegades el **1**. el raonament és exactament igual que abans. Obtenim,

$$C_{14}^{10} \cdot VR_2^4 + C_{14}^{11} \cdot VR_2^3 + C_{14}^{12} \cdot VR_2^2 + C_{14}^{13} \cdot VR_2^1 + 1 = \boxed{19.321 \text{ apostes}}.$$