IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C — 6/VI/2003
Polinomis – II — $(1.75+1.75)+1.75+1.75+3$

1. Sigui el polinomi $p(x) = 4x^3 - 21x + 10$.

a) Trobeu la seva descomposició en factors primers.

b) Trobeu els valors de x tals que $p(x) \geq 0$, a partir dels gràfics que resulten de la descomposició factorial.

a) Apliquem la regla de Ruffini, per trobar el primer factor.

	4	0	−21	10
2		8	16	−10
	4	8	−5	0

Una primera descomposició del polinomi és

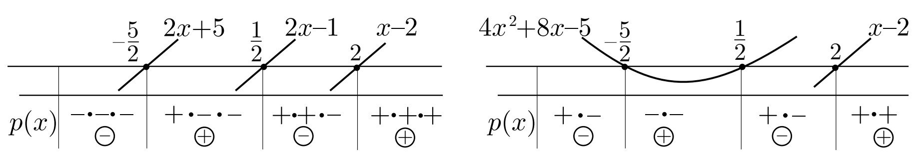
$$p(x) = (x-2)(4x^2+8x-5).$$

Les arrels del segon factor determinaran la descomposició final:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8} = \left.\begin{matrix} \nearrow \ \frac{1}{2} \\ \searrow \ -\frac{5}{2} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 4x^2+8x-5 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

Conseqüentment, $\boxed{p(x) = (x-2)(2x-1)(2x+5)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi del signe dels tres factors per separat i, alternativament, dels dos factors de la primera descomposició:



D'aquí en resulta que $\quad p(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x \geq 2}$.

2. Sigui la potència del binomi $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^{13}$. Esbrineu si hi ha algun terme del seu desenvolupament que sigui de grau 19.

El terme que ocupa un lloc $p \in \mathbb{N}$ qualsevol, s'escriu $T_p = \binom{13}{p-1}\left(\frac{2}{x}\right)^{13-p+1}\left(-x^3\right)^{p-1}$.
L'enunciat diu que l'exponent de x ha de ser 19. O sigui que,

$$x^{19} = \frac{1}{x^{14-p}} \cdot x^{3p-3} = x^{3p-3-14+p} = x^{4p-17} \Longleftrightarrow 19 = 4p-17 \Longleftrightarrow p = 9.$$

El terme buscat és el $\boxed{\text{terme novè } T_9}$ del desenvolupament.

3. La divisió entre el polinomi $p(x) = 9x^4 + kx^2 - 12$ i el polinomi $d(x) = x^2 + 1$ dóna residu igual a -26. Calculeu el valor de k i el quocient de la divisió.

- Alternativa 1: Dividim amb l'algoritme clàssic,

$$\begin{array}{rrr|l}
9x^4 & + kx^2 & -12 & x^2 + 1 \\ \cline{4-4}
-9x^4 & - 9x^2 & & 9x^2 + (k-9) \\ \cline{1-2}
 & (k-9)x^2 & -12 & \\
 & -(k-9)x^2 & -k+9 & \\ \cline{1-4}
 & & -k-3 = -26 &
\end{array}$$

Finalment, obtenim $\boxed{k = 23 \text{ i quocient} = 9x^2 + 14}$.

- Alternativa 2: (mètode de Dani Lara)

Considera $x^2 = z$. Llavors, té la divisió $9z^2 + kz - 12$ entre $z + 1$. Aquesta divisió es pot dur a terme pel mètode de Ruffini. Això ho fa el Dani imposant que el residu és -26 i tirant marxa enrere:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 9 & k & -12 \\
-1 & & -9 & -14 \\ \hline
 & 9 & & -26
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|rrr}
 & 9 & \boxed{k} & -12 \\
-1 & & \boxed{-9} & -14 \\ \hline
 & 9 & \boxed{14} & -26
\end{array}
\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k - 9 = 14 \\ \text{quocient} = 9z + 14. \end{array} \right.$$

Per tant, en ser $z = x^2$, s'obté el resultat $\boxed{\begin{array}{l} k = 23 \\ \text{quocient} = 9x^2 + 14 \end{array}}$.

4. Donada l'expressió

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} - \frac{3}{x^2 - 3x} + \frac{1}{x - 1},$$

utilitzeu el mínim comú múltiple dels denominadors per simplificar-la.

Amb les arrels de $x^2 - 4x + 3$ tindrem la seva descomposició:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left. \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1).$$

D'altra banda, $x^2 - 3x = x(x-3)$. Per tant,

$$\text{m.c.m.}\{x^2 - 4x + 3, x^2 - 3x, x - 1\} = x(x-1)(x-3).$$

Conseqüentment,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2 - 4x + 3} - \frac{3}{x^2 - 3x} + \frac{1}{x - 1} &= \frac{2x - 3(x-1) + x(x-3)}{x(x-1)(x-3)} = \frac{2x - 3x + 3 + x^2 - 3x}{x(x-1)(x-3)} = \\
&= \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x-3)} = \boxed{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$