**1.** Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals):

a) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{64}} - \sqrt{50}}{\sqrt{6}}$.

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}\ \sqrt[6]{a}}{\sqrt{a^5}}$.

c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}-2}$.

a) $\dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \boxed{-\sqrt{3}}$.

b) $a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{5}{2} = a^{\frac{4+1+2-30}{12}} = a^{-\frac{23}{12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^{23}}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^{23}}} \dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \boxed{\dfrac{\sqrt[12]{a}}{a^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{5-4} = \dfrac{25 + 10\sqrt{5}}{1} = \boxed{25 + 10\sqrt{5}}$.

**2.** Resoleu les equacions:

a) $4x^4 + 27x^2 - 7 = 0$.

b) $x - \sqrt{4x+13} = \dfrac{2x}{9}$.

a) $x^2 = \dfrac{-27 \pm \sqrt{729 + 112}}{8} = \dfrac{-27 \pm 29}{8} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \Longrightarrow x = \boxed{\pm\dfrac{1}{2}} \\ -7. \quad \sqrt{-7} \text{ no existeix.} \end{cases}$

b)
$7x = 9\sqrt{4x+13} \Longrightarrow 49x^2 = 324x + 1053 \Longrightarrow 49x^2 - 324x - 1053 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{162 \pm \sqrt{26244 + 51597}}{49} = \dfrac{162 \pm 279}{49} = \begin{cases} \boxed{9} \\ -\dfrac{117}{49}. \end{cases}$

Comprovació:

$x = 9$ és solució perquè $9 - \sqrt{36+13} = 9 - 7 = 2 = \dfrac{2 \cdot 9}{9}$.

$x = -\dfrac{117}{49}$ no és solució perquè $-\dfrac{117}{49} - \sqrt{-\dfrac{468}{49} + 13} < -\dfrac{117}{49} < \dfrac{2 \cdot \frac{-117}{49}}{9}$.

**3.** L'àrea d'un rectangle és igual a 30 $cm^2$, i el seu perímetre és igual a 29 cm. Calculeu la longitud de la seva diagonal.

$x$ = longitud d'un costat del rectangle.
$y$ = longitud de l'altre costat del rectangle.

$$\left.\begin{array}{r} xy = 30 \\ 2x + 2y = 29 \end{array}\right\} \iff x\left(\frac{29-2x}{2}\right) = 30 \iff -2x^2 + 29x - 60 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-29 + \sqrt{841 - 480}}{-4} = \frac{-29+19}{-4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{5}{2} \Longrightarrow y = 12 \\ 12 \Longrightarrow y = \frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

En els dos casos en resulta el mateix rectangle i la seva diagonal mesura

$$\sqrt{12^2 + (5/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{601} \approx \boxed{12.258 \text{ cm}}.$$

**4.** Considereu la funció $f(x) = 5x - x^2$ i el punt $P(0, 9)$.

a) Trobeu els punts de tall del gràfic de $f$ amb els eixos de coordenades, i el seu vèrtex. Representeu $f$ gràficament.

b) Trobeu les funcions afins tals que el seu gràfic passa pel punt $P$ i és tangent al gràfic de $f$.

a) Talls $OX$:
$0 = f(x) = 5x - x^2 \iff x(5-x) = 0 \iff x = 0$ o $x = 5$. Punts $\boxed{(0,0)\ ,\ (5,0)}$.
Talls $OY$: $f(0) = 0$. Punt $\boxed{(0,0)}$.
Vèrtex: $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{-2} = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow y_V = 5\cdot\dfrac{5}{2} - \dfrac{25}{4}$. Punt $\boxed{\left(\dfrac{5}{2}\ ,\ \dfrac{25}{4}\right)}$.

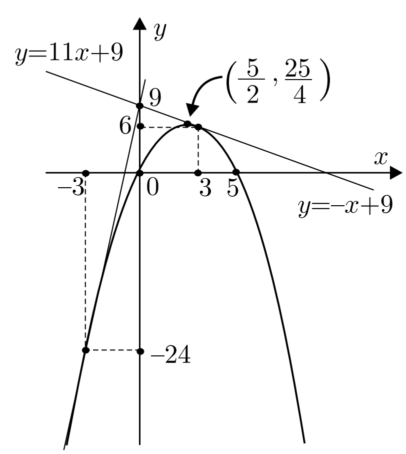
b) Per tal que cada recta buscada tingui un únic punt de contacte amb la paràbola imposem que el sistema d'equacions que proporciona els punts de contacte,

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + 9 \\ y = 5x - x^2 \end{array}\right\} \quad \text{té solució única. Llavors,}$$

$$mx + 9 = 5x - x^2 \iff x^2 + (m-5)x + 9 = 0$$

té solució única. Per tant,

$$(m-5)^2 - 36 = 0 \Longrightarrow m - 5 = \pm 6 \Longrightarrow m = \left\langle \begin{array}{l} 11 \\ -1. \end{array}\right.$$




Les rectes buscades tenen equacions $\boxed{y = 11x + 9 \quad \text{i} \quad y = -x + 9}$. Si cerquem els punts de tangència en resulten el $(-3, -24)$ i el $(3, 6)$.