1. Considereu les successions:

a) $1,\ 7,\ 13,\ 19,\ \ldots$

b) $10,\ 7,\ 4,\ 1,\ \ldots$

c) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$

d) $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ \ldots$

e) $k,\ 2k,\ 3k,\ 4k,\ \ldots$

f) $\frac{3}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{11},\ \frac{3}{14},\ \ldots$

g) $\frac{2}{5},\ \frac{7}{9},\ \frac{12}{13},\ \frac{17}{17},\ \ldots$

h) $\frac{1}{3},\ \frac{19}{12},\ \frac{34}{12},\ \frac{49}{12},\ \ldots$

Trobeu, en cadascuna d'elles, el terme que ocupa el lloc setè, i el terme general a_n. Indiqueu, també, aquelles que són progressions aritmètiques.

a) Observem que la diferència de cada parella de termes consecutius és igual a 6 i, per tant, és una progressió aritmètica de diferència 6. Llavors,

$$1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\ \ldots \Longrightarrow \boxed{a_7 = 37}.$$

El terme general és $\quad a_n = 1 + (n-1)6 = 1 + 6n - 6 \Longrightarrow \boxed{a_n = 6n - 5}$.

b) En aquest cas, la diferència de cada parella de termes consecutius és igual a -3 i, per tant, és una progressió aritmètica de diferència -3. Llavors,

$$10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ -8,\ \ldots \Longrightarrow \boxed{a_7 = -8}.$$

El terme general és $\quad a_n = 10 + (n-1)\cdot(-3) = 10 - 3n + 3 \Longrightarrow \boxed{a_n = -3n + 13}$.

c) Aquesta successió està formada pels quadrats dels nombres naturals. Llavors,

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ \ldots \Longrightarrow \boxed{a_7 = 49}.$$

La diferència de cada parella de termes consecutius no és constant i, per tant, no és una progressió aritmètica. El seu terme general és $\quad \boxed{a_n = n^2}$.

d) Aquesta successió s'obté de la de l'apartat anterior restant 1 a cada terme. Per tant, tampoc és progressió aritmètica. Llavors,

$$1^2-1,\ 2^2-1,\ 3^2-1,\ 4^2-1,\ 5^2-1,\ 6^2-1,\ 7^2-1,\ \ldots \Longrightarrow \boxed{a_7 = 48}.$$

El terme general és $\quad \boxed{a_n = n^2 - 1}$.

e) La diferència de cada parella de termes consecutius és igual a k i, per tant, és una progressió aritmètica de diferència k. Llavors,

$$k,\ 2k,\ 3k,\ 4k,\ 5k,\ 6k,\ 7k,\ \ldots \Longrightarrow \boxed{a_7 = 7k}.$$

El terme general és $\quad \boxed{a_n = k \cdot n}$.

f) El numerador és constant i igual a 3. Els denominadors formen una progressió aritmètica de diferència 3. Per tant, la successió de fraccions no és progressió aritmètica i

$$a_n = \frac{3}{5 + (n-1)3} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{3}{2+3n}, \quad a_7 = \frac{3}{23}}.$$

g) Els numeradors formen una progressió aritmètica i els denominadors formen una altra progressió aritmètica. Les seves diferències són respectivament 5 i 4. Per tant,

$$a_n = \frac{2 + (n-1)5}{5 + (n-1)4} = \frac{2 + 5n - 5}{5 + 4n - 4} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{5n-3}{4n+1} \quad a_7 = \frac{32}{29}}.$$

h) Treurem el terme general del fet que és una progressió aritmètica de diferència $\frac{5}{4}$. Efectivament,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{19}{12}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{19-4}{12}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{34}{12}-\dfrac{19}{12}=\dfrac{34-19}{12}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{49}{12}-\dfrac{34}{12}=\dfrac{49-34}{12}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=\dfrac{1}{3}+(n-1)\,\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{4}n-\dfrac{5}{4}= \\ \quad =\dfrac{5}{4}n+\dfrac{4-15}{12}\Longrightarrow \boxed{a_n=\dfrac{5}{4}n-\dfrac{11}{12}}. \\ a_7=\dfrac{35}{4}-\dfrac{11}{12}=\dfrac{105-11}{12}=\dfrac{94}{12}\Longrightarrow \boxed{a_7=\dfrac{47}{6}}. \end{array}\right.$$

2. Entre els nombres de quatre xifres, trobeu el múltiple de 6 més petit i el múltiple de 6 més gran. Trobeu, a continuació, el valor de la suma de tots els múltiples de 6 que tenen quatre xifres.

Els múltiples de 6 formen una progressió aritmètica de diferència 6 i el seu terme general és $a_n = 6n$. Volem trobar els que estan entre 1000 i 9999. És a dir,

$$1000 < 6n < 9999 \Longleftrightarrow \frac{1000}{6} < n < \frac{9999}{6} \Longleftrightarrow 116.\overset{\frown}{6} < n < 1666.\overset{\frown}{6} \Longleftrightarrow 167 \le n \le 1666.$$

Per tant, el primer múltiple és $a_{167} = 6\cdot 167 = 1002$, i l'últim múltiple és $a_{1666} = 6\cdot 1666 = 9996$. La seva suma és la semisuma del primer més l'últim pel nombre de múltiples. És a dir,

$$\text{Suma} = \frac{1002+9996}{2}\cdot(1666-167+1) = \frac{10998}{2}\cdot 1500 = \boxed{8248500}.$$

3. Doneu les definicions de successió i de progressió aritmètica. Escriviu la fórmula que descriu el terme general d'una progressió aritmètica i expliqueu el significat de cadascuna de les lletres que hi apareixen.

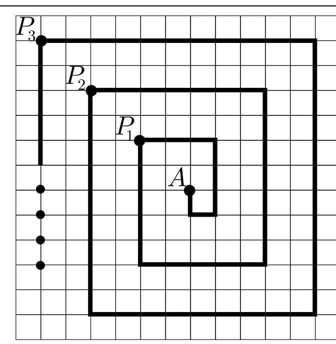
Successió: Col·lecció ordenada de nombres tal que n'hi ha un que és el primer, i cadascun d'ells en té un que el segueix.
Progressió aritmètica: És una successió tal que la diferència de cada dos termes consecutius és constant.
Terme general: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

- a_n és el terme de la successió que ocupa el lloc n.
- a_1 és el primer terme de la successió.
- n és el lloc que ocupa el terme a_n.
- d és la diferència constant entre termes consecutius de la progressió.

4. Imagineu l'espiral adjunta dibuixada fins el punt P_{150}. Si el costat de cada quadrat de la quadrícula mesurés 1 cm,

a) Quina seria la longitud del tram $P_{149}P_{150}$ i de l'última línia horitzontal de l'espiral?

b) Quina seria la longitud total AP_{150} de l'espiral en metres?



Observem que les longituds $a_1 = AP_1$, $a_2 = P_1P_2$, $a_3 = P_2P_3$, formen una progressió aritmètica de diferència 16. Efectivament,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = AP_1 = 2+6 = 8 \\ a_2 = P_1P_2 = 10+14 = 24 \\ a_3 = P_2P_3 = 18+22 = 40 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{150} = P_{149}P_{150} = 8 + (150-1)\,16 = 2392\text{ cm} = \boxed{23.92\text{ m}}. \\ \text{Suma} = \dfrac{8+2392}{2}\cdot 150 = 1200\cdot 150 = \\ \quad = 180000\text{ cm} = \boxed{1800\text{ m}}. \end{array}\right.$$

L'últim tram horitzontal mesura $\dfrac{2392}{4} + 1 = 599\text{ cm} = \boxed{5.99\text{ m}}$.