

1. Opereu i simplifiqueu sense utilitzar nombres decimals:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 5 - \frac{1}{12} + \frac{7}{20} - \frac{32}{15} \\ \text{b)} & \frac{37}{56} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ \text{c)} & \frac{25}{60} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{3}{4} \\ \text{d)} & \frac{4 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}\right)}{\frac{3}{5} - \frac{3}{10}} \end{array}$$

$$\text{a)} \quad 5 - \frac{1}{12} + \frac{7}{20} - \frac{32}{15} = \frac{300 - 5 + 21 - 128}{60} = \frac{188}{60} = \boxed{\frac{47}{15}}.$$

$$\text{b)} \quad \frac{37}{56} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{37}{56} - \frac{3}{16} = \frac{74 - 21}{112} = \boxed{\frac{53}{112}}.$$

$$\text{c)} \quad \frac{25}{60} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12} - \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12} - \frac{2}{3} = \frac{5 - 8}{12} = \frac{-3}{12} = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

$$\text{d)} \quad \frac{4 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}\right)}{\frac{3}{5} - \frac{3}{10}} = \frac{4 - 2 \cdot \left(\frac{15}{25} - \frac{1}{25}\right)}{\frac{6 - 3}{10}} = \frac{4 - \frac{8}{25}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{100 - 28}{25}}{\frac{3}{10}} = \frac{72 \cdot 10}{25 \cdot 3} = \frac{24 \cdot 2}{5} = \boxed{\frac{48}{5}}.$$

2. Considereu les successions:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 5, 9, 13, 17, \dots \\ \text{b)} & 13, 7, 1, -5, \dots \\ \text{c)} & \frac{2}{7}, \frac{5}{6}, \frac{8}{5}, \frac{9}{4}, \dots \\ \text{d)} & \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \dots \end{array}$$

Trobeu, en cadascuna d'elles, el terme que ocupa el lloc sisè, i el terme general  $a_n$ .

a) La diferència de cada parella de termes consecutius és igual a 4 i, per tant, és una progressió aritmètica de diferència 4. Llavors,

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots \implies \boxed{a_6 = 25}.$$

El terme general és  $a_n = 5 + (n - 1)4 = 5 + 4n - 4 \implies \boxed{a_n = 4n + 1}.$

b) La diferència de cada parella de termes consecutius és igual a -6 i, per tant, és una progressió aritmètica de diferència -6. Llavors,

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \dots \implies \boxed{a_6 = -17}.$$

El terme general és  $a_n = 13 + (n - 1) \cdot (-6) = 13 - 6n + 6 \implies \boxed{a_n = 19 - 6n}.$

c) Els numeradors formen una progressió aritmètica i els denominadors formen una altra progressió aritmètica. Les seves diferències són, respectivament, 3 i -1. Per tant,

$$a_n = \frac{2 + (n - 1)3}{7 + (n - 1) \cdot (-1)} = \frac{2 + 3n - 3}{7 - n + 1} \implies \boxed{a_n = \frac{3n - 1}{8 - n} \quad a_6 = \frac{17}{2}}.$$

d) Aquesta és una progressió aritmètica de diferència  $\frac{1}{2}$ . Efectivament,

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{6} - \frac{1}{3} &= \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - \frac{5}{6} &= \frac{8-5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} - \frac{4}{3} &= \frac{11-8}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{3} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \\ = \frac{1}{2}n + \frac{2-3}{6} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{3n-1}{6}}. \\ a_6 = \frac{3 \cdot 6 - 1}{6} = \frac{18-1}{6} \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{17}{6}}. \end{cases}$$

**3.** Una persona estalvia 6 euros el gener de l'any 2004. Cada mes que passa estalvia 6 euros més que el mes anterior.

Mes-any	Estalvi mensual	Estalvi total
Gener-2004	6	6
Febrer-2004	12	18
Març-2004	18	36
Abril-2004	24	60
... ..	...	...

Si segueix aquesta rutina, quin serà l'estalvi total al final de l'any 2010?

La successió d'estalvis mensuals formen una progressió aritmètica de diferència 6. L'estalvi total s'obtindrà de sumar tots els estalvis mensuals. Entre els anys 2004 i 2010 se sumen un total de  $7 \cdot 12 = 84$  mesos. Per tant, hem de sumar els 84 primers termes de la progressió aritmètica

$$6, 12, 18, 24, 30 \dots$$

Això es pot dur a terme amb la fórmula de la suma de les progressions aritmètiques:

$$S_{84} = \frac{a_1 + a_{84}}{2} \cdot 84 = \frac{6 + (6 + 83 \cdot 6)}{2} \cdot 84 = \frac{6 + 504}{2} \cdot 84 = 205 \cdot 42 = \boxed{21420 \text{ euros}}.$$

**4.** En un poble de 10045 habitants, s'han casat en 1 any el 2.5% d'homes i el 2.4% de dones. Trobeu el nombre d'homes i de dones del poble. [Els matrimonis han sigut entre gent del poble i de parelles home-dona.]

**Indicació:** Considereu  $\begin{cases} x = \text{nombre d'homes del poble} \\ 10045 - x = \text{nombre de dones del poble.} \end{cases}$

Segons diu l'enunciat

$$\begin{cases} \frac{2.5}{100} x = \text{nombre d'homes que es casen} \\ \frac{2.4}{100} (10045 - x) = \text{nombre de dones que es casen.} \end{cases}$$

Sabem que cada home es casa amb una dona i cada dona amb un home. Per tant, el nombre d'homes que es casen és igual al nombre de dones:

$$\frac{2.5}{100} x = \frac{2.4}{100} (10045 - x) \iff 2.5 \cdot x = 2.4 \cdot (10045 - x) \iff 4.9x = 24108 \iff$$

$$\iff x = \frac{24108}{4.9} = 4920 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \text{nombre d'homes del poble} = 4920 \\ \text{nombre de dones del poble} = 10045 - 4920 = 5125. \end{cases}$$