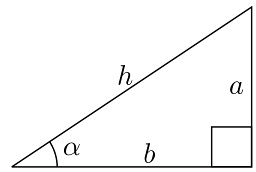
IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 4t ESO C — 18/III/2004
Trigonometria i funcions — 1+1+2.5+2+2.5+1

1. Demostreu, amb l'ajut dels triangles rectangles, que tots els angles α, entre 0° i 90°, satisfan la igualtat

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{h^2} \overset{(*)}{=} \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

(∗) Hem aplicat el teorema de Pitàgoras.



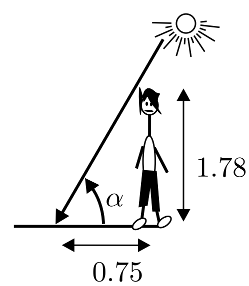
2. Una persona que mesura 1.78 m projecta una ombra de 0.75 m, per l'acció dels raigs del Sol. Quin és l'angle d'elevació, —en graus, minuts i segons—, del Sol sobre l'horitzó?

Coneixem la relació entre els catets d'un triangle rectangle. Per tant, treballarem amb la tangent trigonomètrica.

$$\tan\alpha = \frac{1.78}{0.75} \approx 2.37333333 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{TAN}}\ \boxed{(}\ \boxed{1.78}\ \boxed{\div}\ \boxed{0.75}\ \boxed{)} \approx$$

$$\approx 6715195713 = \boxed{67^\circ\, 9'\, 7.05''}$$



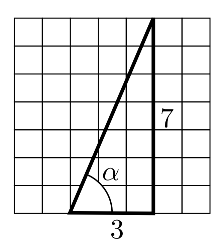
3. Construïu una quadrícula 7×7. Utilitzeu-la per dibuixar un angle α tal que $\tan\alpha = \dfrac{7}{3}$. Tot seguit,

a) Utilitzeu la calculadora per trobar el valor de l'angle α en graus, minuts i segons, i calcular $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

b) Trobeu el valor exacte de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ sense calculadora.

a) $\alpha = \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{TAN}}\ \boxed{(}\ \boxed{7}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{)} = 66.80140949 \approx \boxed{66^\circ\, 48'\, 5.07''}$.
Amb la calculadora obtenim,

$$\boxed{\sin\alpha = 0.91914503} \quad \text{i} \quad \boxed{\cos\alpha = 0.393919298}.$$



b) Si utilitzem les igualtats $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, obtenim

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+49/9}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{58}}}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{58}} = \sqrt{\frac{49}{58}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{58}}}.$$

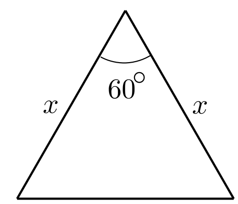
4. L'àrea d'un triangle equilàter és igual a $\sqrt{7203}$. Calculeu la longitud de cada costat del triangle.

Anomenem x la longitud de cada costat del triangle equilàter. Sabem que

$$\sqrt{7203} = \frac{1}{2}\, x \cdot x \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\, x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2\cdot 2\sqrt{7203}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3\cdot 2401}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2401} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow x = \sqrt{4\cdot 49} = 2\cdot 7 = \boxed{14}\,. \end{aligned}$$



5. Considereu les funcions $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$ i $g(x) = -\dfrac{5}{2}\,x - \dfrac{3}{2}$.

a) Trobeu el seus talls amb els eixos de coordenades i, per a la funció f, el valor mínim de $f(x)$.

b) Utilitzeu els resultats anteriors per fer la representació gràfica de les dues funcions.

c) Trobeu els punts en què es tallen els gràfics de les dues funcions.

a) i b) Talls OX de $f(x)$:

$$0 = f(x) = 2x^2 - 5x - 12 \Longleftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5\pm 11}{4} = \begin{cases} 4 \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } \boxed{(4,0)\ ,\ \left(-\frac{3}{2}, 0\right)}\,.$$

Tall OY de $f(x)$:

$$f(0) = 2\cdot 0^2 - 5\cdot 0 - 12 = -12. \text{ Punt: } \boxed{(0,-12)}\,.$$

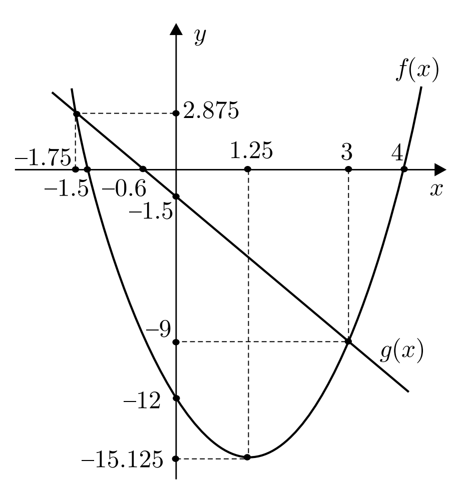
El valor mínim de $f(x)$ coincideix amb la ordenada y_V del vèrtex:

$$x_V = \frac{4 + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{5}{4} \Longrightarrow y_V = 2\cdot\frac{25}{16} - \frac{25}{4} - 12 = \boxed{-\frac{121}{8}}\text{. Vèrtex: } \left(\frac{5}{4}\ ,\ -\frac{121}{8}\right)\,.$$

Tall OX de $g(x)$:

$$0 = g(x) = -\frac{5}{2}\,x - \frac{3}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{3/2}{-5/2} = -\frac{3}{5}\,.$$

$$\text{Punt: } \boxed{\left(-\frac{3}{5}\ ,\ 0\right)}\,.$$



Tall OY de $g(x)$:

$$g(0) = -\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{3}{2}\text{. Punt: } \boxed{\left(0, -\frac{3}{2}\right)}\,.$$

c) Els gràfics es tallen en els punts x que tenen les imatges, de les dues funcions, iguals. És a dir, s'ha d'imposar la condició $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff 2x^2 - 5x - 12 = -\frac{5}{2}\,x - \frac{3}{2} \iff 4x^2 - 10x - 24 = -5x - 3 \iff$$

$$\iff 4x^2 - 5x - 21 = 0 \iff x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{8} = \frac{5 \pm 19}{8} = \begin{cases} 3 \\ -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y = \begin{cases} g(3) = -\dfrac{5}{2} \cdot 3 - \dfrac{3}{2} = -9 \\ g\left(-\dfrac{7}{4}\right) = -\dfrac{5}{2} \cdot \left(-\dfrac{7}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8} \end{cases}$$

$$\text{Punts d'intersecció: } \boxed{(3, -9), \ \left(-\frac{7}{4}\,,\ \frac{23}{8}\right)}.$$

6. Trobeu la funció afí $f(x) = ax + b$, tal que el seu gràfic passa pels punts

$$A\left(-\frac{1}{2}, 3\right) \quad \text{i} \quad B\left(4, -\frac{9}{5}\right).$$

Si imposem les condicions de l'enunciat obtenim,

$$\begin{cases} 3 = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a\left(-\dfrac{1}{2}\right) + b \\ -\dfrac{9}{5} = f(4) = 4a + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 = -a + 2b \\ -9 = 20a + 5b \end{cases} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 120 = -20a + 40b \\ -9 = 20a + 5b \\ \hline 111 = \qquad 45b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{111}{45} = \dfrac{37}{15} \\ a = 2 \cdot \dfrac{37}{15} - 6 = \dfrac{74 - 90}{15} = \dfrac{-16}{15} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f(x) = -\frac{16}{15}\,x + \frac{37}{15}}.$$

$(*)$ Hem multiplicat els dos membres de la primera equació per 20.