1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui, sense utilitzar la calculadora ni els nombres decimals:

a) $\dfrac{100-\left(\dfrac{5}{99}+\dfrac{1}{10^{-2}}\right)}{1-2.1\widehat{81}}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}$

c) $\sqrt{3}+\dfrac{5}{\sqrt{75}}-\dfrac{\sqrt{108}}{5}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{100}\cdot y^{-25}}\cdot\sqrt{x^{20}\cdot y^{37}}}{\sqrt[4]{\left(x^{20}\cdot y^{10}\right)^3}}$

a) $$\frac{100-\left(\dfrac{5}{99}+\dfrac{1}{10^{-2}}\right)}{1-2.1\widehat{81}}=\frac{-\dfrac{5}{99}}{1-\dfrac{2181-21}{990}}=\frac{-\dfrac{5}{99}}{\dfrac{990-2160}{990}}=\frac{-50}{-117}=\boxed{\frac{5}{117}}.$$

b) $$\frac{\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}\cdot\frac{4+\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}(4+\sqrt{6})}{16-6}=\frac{4\sqrt{6}}{10}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}+3}{5}}.$$

c) $$\sqrt{3}+\frac{5}{\sqrt{75}}-\frac{\sqrt{108}}{5}=\sqrt{3}+\frac{5}{5\sqrt{3}}-\frac{6\sqrt{3}}{5}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{6}{5}\right)\sqrt{3}=\frac{15+5-18}{15}\sqrt{3}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{15}}.$$

d) $$\frac{\sqrt[3]{x^{100}\cdot y^{-25}}\cdot\sqrt{x^{20}\cdot y^{37}}}{\sqrt[4]{\left(x^{20}\cdot y^{10}\right)^3}}=x^{\frac{100}{3}+10-15}\,y^{-\frac{25}{3}+\frac{37}{2}-\frac{15}{2}}=x^{\frac{100-15}{3}}\,y^{\frac{-50+66}{6}}=x^{\frac{85}{3}}\,y^{8}3=\boxed{x^{28}\,y^2\,\sqrt[3]{x\,y^2}}.$$

2. Des d'un punt P surt a les 9 h un mòbil que porta una velocitat de 76 km/h. A les 9 h 37 min surt des del punt P, en la mateixa direcció, un altre mòbil que porta una velocitat de 85 km/h. Cerqueu en hores, minuts i segons l'hora que el segon mòbil agafarà al primer, si no s'aturen abans.

Anomenem x la distància que recorren cadascun dels dos mòbils, M_1 i M_2, des que surten fins que es troben. Anomenem t el temps invertit per M_1 per recórrer la distància x. Llavors, representem els elements del moviment en el requadre següent

	distància	velocitat	temps
M_1	x	76	t
M_2	x	85	$t-\frac{37}{60}$
	km	km/h	h.

En resulta

$$76t=85t-\frac{85\cdot 37}{60}\Longrightarrow 9t=\frac{85\cdot 37}{60}\Longrightarrow t=\frac{85\cdot 37}{60\cdot 9}=\frac{624}{108}=5.824\text{ h}\,.$$

Per tant, l'hora de trobada serà $9\text{ h}+5\text{ h }49\text{ min }14.4\text{ s}=\boxed{14\text{ h }49\text{ min }14.4\text{ s}}.$

3. Resoleu:

a) $3x^2 - 6x + 3 = 0\,.$

b) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0\,.$

c) $x - \sqrt{\dfrac{x}{2} - 1} = 2x - 12\,.$

d) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

a) $3x^2 + 6x + 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff \boxed{x = -1}\,.$

b) $$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} = \begin{matrix} \nearrow & 7 \\ \searrow & -10 \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}7\\-10\end{matrix}}\right\} \Longrightarrow x^2 = 7 \Longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{7}}\,.$$

$x^2 = -10$ no origina cap solució real perquè un real positiu no pot ser negatiu.

c) $$x - \sqrt{\frac{x}{2} - 1} = 2x - 12 \Longrightarrow \frac{x}{2} - 1 = x^2 - 24x + 144 \Longrightarrow 2x^2 - 49x + 290 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{49 \pm \sqrt{2401 - 2320}}{4} = \frac{49 \pm 81}{4} = \begin{matrix} \nearrow & \dfrac{58}{4} = \dfrac{29}{2} \\ \searrow & \dfrac{40}{4} = \boxed{10} \end{matrix}$$

Comprovació:

$x = 10$ és solució perquè $\begin{cases} 10 - \sqrt{\dfrac{10}{2} - 1} = 10 - \sqrt{4} = 10 - 2 = 8\,. \\ 2 \cdot 10 - 12 = 20 - 12 = 8\,. \end{cases}$

$x = \dfrac{29}{2}$ no és solució perquè $\begin{cases} \dfrac{29}{2} - \sqrt{\dfrac{29}{4} - 1} = \dfrac{29}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{29 - 5}{2} = 12\,. \\ 2 \cdot \dfrac{29}{12} - 12 = 29 - 12 = 17\,. \end{cases}$

d) $$\left.\begin{matrix} x^2 - 4y^2 = 4 \\ 3x + 2y = 9 \Longrightarrow x = \dfrac{9 - 2y}{3} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{81 + 4y^2 - 36y}{9} - 4y^2 = 4 \iff$$

$$\iff 81 + 4y^2 - 36y - 36y^2 = 36 \iff 32y^2 + 36y - 45 = 0 \iff$$

$$\iff y = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 1440}}{32} = \frac{-18 \pm 42}{32} = \begin{matrix} \nearrow & \dfrac{3}{4} \\ \searrow & -\dfrac{15}{8} \end{matrix} \iff \left\{ \boxed{\begin{matrix} y = \dfrac{3}{4}\,, x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{15}{8}\,, x = \dfrac{17}{4} \end{matrix}} \right.$$

4. L'altura d'un triangle equilàter mesura 30 cm. Calculeu l'àrea del triangle.

$$4x^2 = 30^2 + x^2 \Longrightarrow 3x^2 = 30^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{900}{3} = 300 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Àrea} = x \cdot 30 = \sqrt{300} \cdot 30 = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot 30 =$$

$$= \boxed{300\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 519.6\ \text{cm}^2}\,.$$