Heu de triar quatre exercicis i intentar resoldre'ls.

1. Considereu les funcions $f(x) = x^2 + x - 6$ i $g(x) = 2x - 2$.

a) Trobeu el seus talls amb els eixos de coordenades i, per a la funció f, el valor mínim de $f(x)$.

b) Utilitzeu els resultats anteriors per fer la representació gràfica de les dues funcions sobre els mateixos eixos de coordenades.

c) Trobeu, analíticament, els punts en què es tallen els gràfics de les dues funcions i comproveu sobre el gràfic de l'apartat anterior que el resultat és correcte.

a) i b) Talls OX de $f(x)$:

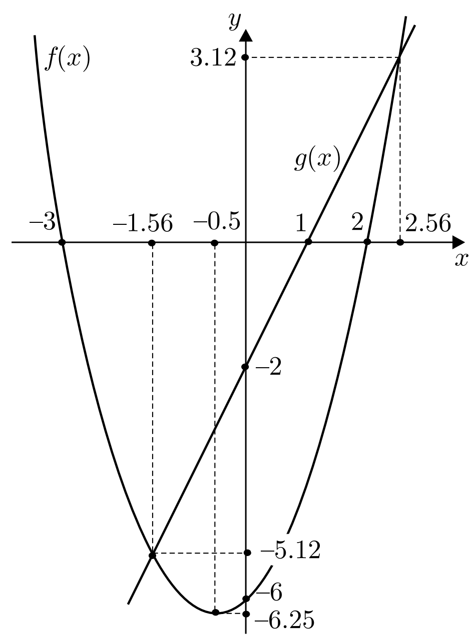
$$0 = f(x) = x^2 + x - 6 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} . \quad \text{Punts: } \boxed{(2,0)\ ,\ (-3,0)}.$$

Tall OY de $f(x)$: $f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6$. Punt: $\boxed{(0,-6)}$.

El valor mínim de $f(x)$ coincideix amb la ordenada y_V del vèrtex:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow y_V = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \boxed{-\frac{25}{4}}.$$

Vèrtex: $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{25}{4}\right)$.



Tall OX de $g(x)$:

$$0 = g(x) = 2x - 2 \iff x = \frac{2}{2} = 1.$$

Punt: $\boxed{(1\ ,\ 0)}$.

Tall OY de $g(x)$:

$g(0) = 2 \cdot 0 - 2$. Punt: $\boxed{(0,2)}$.

c) Els gràfics es tallen en els punts x que tenen les imatges $f(x)$ i $g(x)$ iguals. És a dir, s'ha d'imposar la condició $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + x - 6 = 2x - 2 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} 2.56 \\ -1.56 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = \begin{cases} g(2.56) = 2 \cdot 2.56 - 2 = 3.12 \\ g(-1.56) = 2 \cdot (-1.56) - 2 = -5.12 \end{cases}$$

Punts d'intersecció: $\boxed{(2.56, 3.12),\ (-1.56\ ,\ -5.12)}$.

2. Considereu els polinomis $p(x) = x^5 - 2x^4 + 10$ i $d(x) = x^2 + x + 1$. Calculeu:

a) $p(x) \cdot d(x)$.

b) El quocient i el residu de la divisió de $p(x)$ entre $d(x)$, i comproveu que el resultat és correcte.

a)

$$\begin{aligned} p(x) \cdot d(x) &= x^7 + (1-2)x^6 + (1-2)x^5 - 2x^4 + 10x^2 + 10x + 10 = \\ &= \boxed{x^7 - x^6 - x^5 - 2x^4 + 10x^2 + 10x + 10}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & -2x^4 & & & & +10 & x^2 + x + 1 \\ \cline{7-7} -x^5 & -x^4 & -x^3 & & & & x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{1-3} & -3x^4 & -x^3 & & & & \\ & 3x^4 & +3x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{2-4} & & 2x^3 & +3x^2 & & & \\ & & -2x^3 & -2x^2 & -2x & & \\ \cline{3-5} & & & x^2 & -2x & +10 & \\ & & & -x^2 & -x & -1 & \\ \cline{4-6} & & & & -3x & +9 & \end{array}$$

$\boxed{\text{Quocient} = x^3 - 3x^2 + 2x + 1}$

$\boxed{\text{Residu} = -3x + 9}$

Comprovació:

$$\begin{aligned} &\boxed{(x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) + (-3x + 9)} = \\ &= \left[x^5 + (-3+1)x^4 + (2-3+1)x^3 + (1+2-3)x^2 + (1+2)x + 1\right] + (-3x + 9) = \\ &= x^5 - 2x^4 + 3x + 1 + (-3x + 9) = \boxed{x^5 - 2x^4 + 10}. \end{aligned}$$

3. Considereu la funció $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

a) Representeu les seves asímptotes, els talls amb els eixos i el seu gràfic.

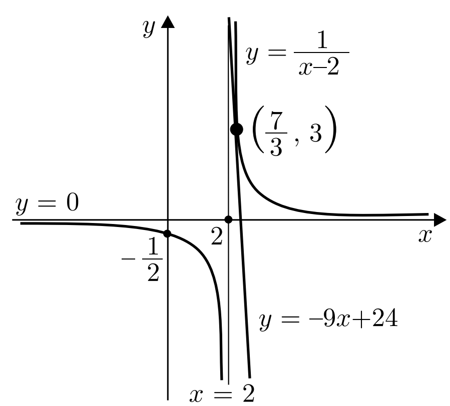
b) Trobeu la funció que determina la recta tangent al gràfic que passa pel punt $\left(\dfrac{7}{3}, 3\right)$. Representeu-la sobre el gràfic anterior.

a) **Asímptota Vertical:** Cal estudiar en quin punt x la imatge $f(x)$ tendeix a $\pm\infty$. Per això és necessari que $x - 2$ tendeixi a 0. O sigui que cal que x tendeixi a 2. Llavors, la recta $\boxed{x = 2}$ és asímptota.

Asímptota horitzontal: Cal estudiar la tendència de $f(x)$ quan x tendeix a $\pm\infty$.

$$\frac{1}{x-2} \longrightarrow \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Llavors, la recta $\boxed{y = 0}$ és asímptota.



b)La funció cercada és del tipus $g(x) = a\,x + b$. En ser el punt $\left(\dfrac{7}{3}, 3\right)$ del seu gràfic, tenim

$$3 = g\left(\frac{7}{3}\right) = a \cdot \frac{7}{3} + b \Longrightarrow b = \frac{9 - 7a}{3} \Longleftrightarrow g(x) = a\,x + \frac{9 - 7a}{3}.$$

D'altra banda, si la recta ha de ser tangent al gràfic, ha de tenir un únic punt de contacte amb la hipèrbola. Per tant l'equació $f(x) = g(x)$ ha de tenir solució única:

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{x-2} = a\,x + \frac{9-7a}{3} \iff 3 = 3ax(x-2) + (9-7a)(x-2) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 3ax^2 + (9-13a)x + 14a - 21 = 0.$$

Si la solució ha de ser única, el discriminant de l'equació anterior ha de ser 0. Per tant,

$$(9-13a)^2 - 4(14a-21)3a = 0 \Longrightarrow 81 + 169a^2 - 234a - 168a^2 + 252a = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a^2 + 18a + 81 = 0 \Longrightarrow a = \frac{-9 \pm \sqrt{81-81}}{1} = \frac{-9 \pm 0}{1} = \begin{cases} -9 \\ -9 \end{cases} \Longrightarrow a = -9.$$

Conseqüentment, $b = \dfrac{9 - 7\cdot(-9)}{3} = 24$, i la funció cercada és $\boxed{g(x) = -9x + 24}$.

4. Considereu el polinomi $p(x) = x^4 + 1$

a) Comproveu que $x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}\cdot x\right)^2$ és una identitat.

b) Utilitzeu la diferència de quadrats anterior per expressar el polinomi x^4+1 com un producte de polinomis de grau 2.

a) És una identitat perquè

$$(x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = x^4 + 1.$$

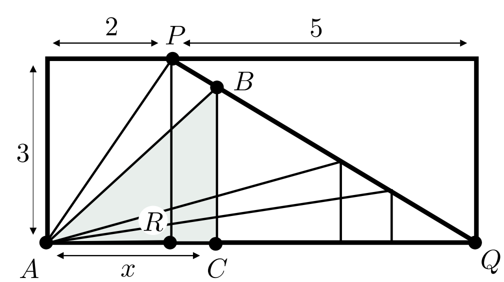
b) Utilitzem que la diferència de quadrats és el producte d'una suma per una diferència,

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = \left[(x^2+1) + \sqrt{2}\,x\right] \cdot \left[(x^2+1) - \sqrt{2}\,x\right] = \\ &= \boxed{\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)} \end{aligned}$$

5. Considereu tots els triangles rectangles ABC amb el vèrtex B variable sobre el segment PQ, el vèrtex C variable sobre el segment RQ, i el costat BC perpendicular al segment RQ.

a) Expresseu l'àrea del triangle ABC en funció de x. (indicació: Observeu que QBC i QPR són semblants.)

b) Trobeu el triangle ABC que té l'àrea màxima i calculeu-la.



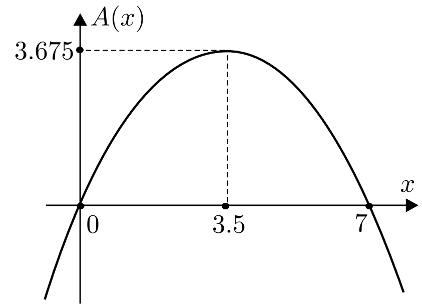
a) Per trobar l'àrea en funció de x, hem d'expressar l'altura BC del triangle en funció de x. Ho aconseguirem amb la semblança de la indicació:

$$\frac{BC}{PR} = \frac{QC}{QR} \Longrightarrow \frac{BC}{3} = \frac{7-x}{5} \Longrightarrow BC = \frac{3}{5}(7-x) \Longrightarrow \text{Àrea} = \frac{1}{2}\,x \cdot \frac{3}{5}(7-x)\,.$$

Per tant, la funció que proporciona l'àrea del triangle és

$$\boxed{A(x) = \frac{3}{10}\,x\,(7-x)}.$$

b) La funció $A(x)$ és quadràtica. Per tant, el seu gràfic és una paràbola. Aquesta talla l'eix OX quan $A(x) = 0$, és a dir, quan $x = 0$ o $x = 7$. Té el coeficient de la part quadràtica negatiu, la qual cosa ens informa que té les branques "avall". Llavors, el seu vèrtex proporcionarà el valor màxim de l'àrea. Concretament,



$$x_V = \frac{0+7}{2} = 3.5 \Longrightarrow A(3.5) = \frac{3}{10} \cdot 3.5^2 = 3.675.$$

En definitiva, $\boxed{\text{l'àrea màxima és } 3.675}$, la qual està determinada pel triangle de base $x = 3.5$.