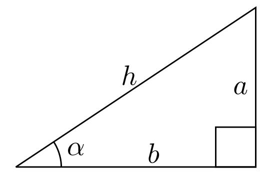
1. Considereu el triangle rectangle adjunt. A partir de les definicions de les raons trigonomètriques demostreu les identitats següents:



a) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

c) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

d) $\tan(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Recordem que $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\sin\alpha = \dfrac{a}{h}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{h}$. Llavors,

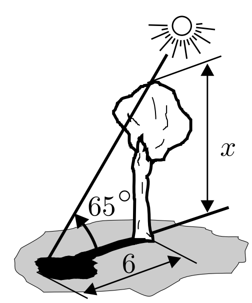
a) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{h\cdot\sin\alpha}{h\cdot\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{h}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2} = 1$. (La penúltima igualtat, pel teorema de Pitàgoras.)

c) $1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

d) $\tan(90^\circ - \alpha) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

2. Un arbre projecta una ombra de 6 m quan el Sol es troba a una altura de 65° sobre l'horitzó. Calculeu l'alçada de l'arbre.

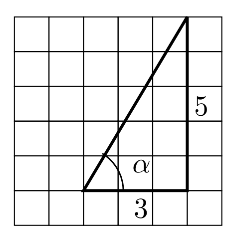


$\tan 65^\circ = \dfrac{x}{6} \Longrightarrow x = 6\cdot\tan 65^\circ \approx 12.87$ m.

3. Construïu una quadrícula 6 × 6. Utilitzeu-la per dibuixar un angle α tal que $\tan\alpha = \dfrac{5}{3}$. Tot seguit,

a) Utilitzeu la calculadora per trobar el valor de l'angle α en graus, minuts i segons, i calcular $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

b) Calculeu el valor exacte de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ sense calculadora.



a) $\alpha =$ $\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{TAN}}\,\boxed{(}\,\boxed{5}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{)}$ $= 59.03624347 = \boxed{59^\circ\, 2'\, 10.48''}$.
Amb la calculadora, surt immediatament,

$$\boxed{\sin\alpha = 0.857492925} \quad \text{i} \quad \boxed{\cos\alpha = 0.514495755}.$$

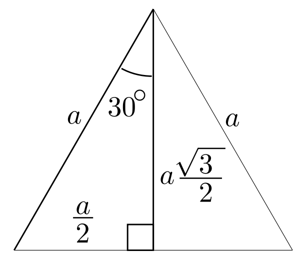
b) Si utilitzem les igualtats $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, obtenim

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+25/9}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{34}}}.\\
\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}.
\end{aligned}$$

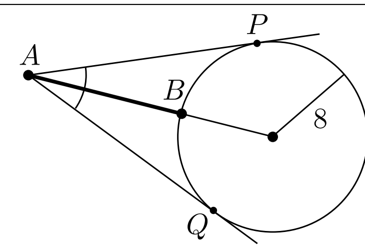
4. Considereu un triangle equilàter de costat a. Utilitzeu-lo per trobar, sense calculadora, els valors exactes de $\sin 30°$, $\cos 30°$ i $\tan 30°$.

Pel teorema de Pitàgoras, l'altura del triangle és $h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{3a^2/4} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

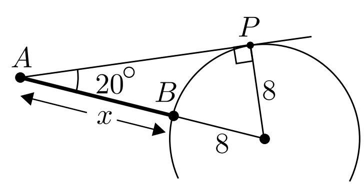
$$\begin{aligned}
\sin 30° &= \frac{a/2}{a} = \boxed{\frac{1}{2}}.\\
\cos 30° &= \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.\\
\tan 30° &= \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}.
\end{aligned}$$



5. En la figura adjunta, AP i AQ són tangents en P i Q a la circumferència de radi 8 cm. Calculeu la distància AB per tal que l'angle $\widehat{PAQ}$ mesuri $40°$.



$$\sin 20° = \frac{8}{8+x} \implies 8+x = \frac{8}{\sin 20°} \implies$$
$$\implies x = \frac{8}{\sin 20°} - 8 = \boxed{15.39 \text{ m}}.$$



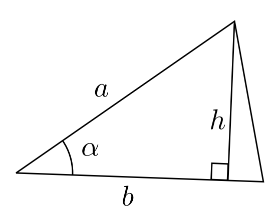
6. Demostreu que l'àrea S d'un triangle amb dos costats de longituds a i b, i l'angle entre els dos costats igual a α, es pot calcular mitjançant

$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Utilitzeu aquest resultat per calcular l'àrea d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 10 cm.

$$S = \frac{1}{2}\, b \cdot h = \boxed{\frac{1}{2}\, b \cdot a \cdot \sin\alpha}.$$

L'àrea del pentàgon és igual a la suma d'àrees de 5 triangles d'angle central $360°/5 = 72°$ i els costats que el formen de longitud 10. Per tant,



$$\text{Àrea} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 72° = 250 \cdot \sin 72° = \boxed{237.76 \text{ cm}^2}.$$