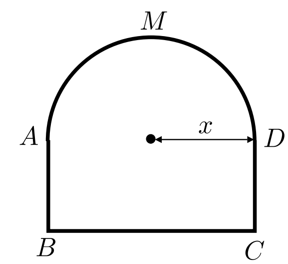
IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C — 10/VI/2004
Funcions i Polinomis — 4×2.5

1. Considereu totes les figures compostes, com la figura adjunta, d'un rectangle $ABCD$ i un semicercle AMD. Sabem que la suma dels costats BC i CD té valor 10.

a) Expresseu l'àrea total de la figura en funció del radi x del cercle.

b) Entre totes les figures anteriors, trobeu la que té àrea màxima.



a) Els costats del rectangle mesuren, segons les dades, $2x$ i $10-2x$. Per tant, l'àrea $A(x)$ de la figura és

$$A(x) = \frac{\pi\, x^2}{2} + 2x(10-2x) = \boxed{\left(\frac{\pi}{2} - 4\right) x^2 + 20x = x\left[\left(\frac{\pi-8)}{2}\right)\ x + 20\right]}\,.$$

b) $A(x)$ és una funció quadràtica. El seu gràfic és una paràbola amb les branques avall, perquè el coeficient de la part quadràtica és negatiu. Per tant, el valor màxim ve determinat pel vèrtex. O sigui que el màxim s'obté quan el radi x és

$$x = \frac{-20}{2\left(\frac{\pi-8}{2}\right)} = \boxed{\frac{20}{8-\pi} \approx 4.117}\,.$$

L'àrea màxima serà

$$A\left(\frac{20}{8-\pi}\right) = \left(\frac{20}{8-\pi}\right)^2 \frac{\pi-8}{2} + \frac{20^2}{8-\pi} = \frac{20^2}{8-\pi}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{\frac{200}{8-\pi} \approx 41.166}\,.$$

Trieu tres exercicis, entre els nombres 2, 3, 4, 5, i intenteu-ne la resolució.

2. a) Considereu els polinomis $p(x) = 4x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 10x - 9$ i $d(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculeu el quocient i el residu de la divisió de $p(x)$ entre $d(x)$.

b) Raoneu si el polinomi $x^n - a^n$ és divisible entre $x + a$, en què $n \in \mathbb{N}$.
(Indicació: Treballeu per separat els casos n parell i n senar.)

a)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & -\ 5x^3 & +\ 3x^2 & +\ 10x & -\ 9 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & +\ 12x^4 & -\ 8x^3 & & & & 4x^3 + 12x^2 + 23x + 48 \\ \cline{1-3}
 & 12x^4 & -\ 13x^3 & +\ 3x^2 & & & \\
 & -\ 12x^4 & +\ 36x^3 & -\ 24x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 23x^3 & -\ 21x^2 & +\ 10x & & \\
 & & -\ 23x^3 & +\ 69x^2 & -\ 46x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 48x^2 & -\ 36x & -\ 9 & \\
 & & & -\ 48x^2 & +\ 144x & -\ 96 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 108x & -\ 105 &
\end{array}$$

$\boxed{\text{Quocient} = 4x^3 + 12x^2 + 23x + 48}$

$\boxed{\text{Residu} = 108x - 105}$

Comprovació:

$$\boxed{(x^2-3x+2)\cdot(4x^3+12x^2+23x+48)+(108x-105)} =$$
$$= \left[4x^5+(12-12)x^4+(23-36+8)x^3+(48-69+24)x^2+(-144+46)x+96\right]+$$
$$+(108x-105)=4x^5-5x^3+3x^2-98x+96+(108x-105)=\boxed{4x^5-5x^3+3x^2+10x-9}.$$

b) Si apliquem el teorema del residu obtenim,

$$p(x)=x^n-a^n \Longrightarrow p(-a)=(-a)^n-a^n=\begin{cases} a^n-a^n=0\,, & \text{si } n \text{ és parell} \\ -a^n-a^n=-2a^n\,, & \text{si } n \text{ és senar.}\end{cases}$$

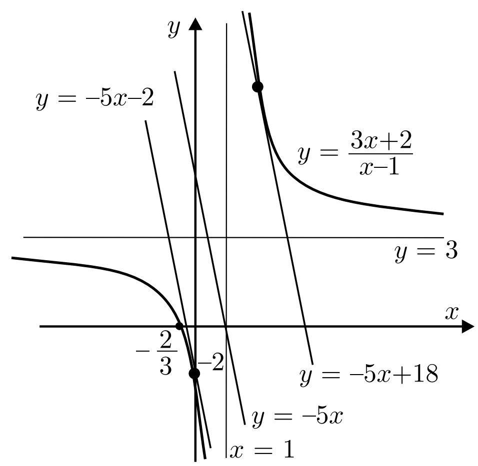
Conclusió:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } a=0, \text{ sempre és divisible.}\\ \text{Si } a\neq 0, \text{ és divisible per a } n \text{ parell.}\end{array}}$$

3. Considereu la funció $\quad f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}\,.$

a) Cerqueu les seves asímptotes, els talls amb els eixos i representeu el seu gràfic.

b) Trobeu la funció que determina la recta tangent al gràfic paral·lela a la recta $5x+y=0$.



a) **Asímptota Vertical:** Estudiem en quin punt x la imatge $f(x)$ tendeix a $\pm\infty$. Per això és necessari que $x-1$ tendeixi a 0. O sigui que cal que x tendeixi a 1. Per tant, la recta $\boxed{x=1}$ és asímptota.

Asímptota horitzontal: Estudiem la tendència de $f(x)$ quan x tendeix a $\pm\infty$.

$$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} \overset{(x\longrightarrow\pm\infty)}{\longrightarrow} \frac{3+\frac{2}{\pm\infty}}{1-\frac{1}{\pm\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=3.$$

Llavors, la recta $\boxed{y=3}$ és asímptota.

Tall OX de $f(x)$:

$$0=f(x)=\frac{3x+2}{x-1}\Longleftrightarrow 3x+2=0\Longleftrightarrow x=\frac{-2}{3}\,. \text{ Punt: } \boxed{\left(-\frac{2}{3}\;,\;0\right)}.$$

Tall OY de $f(x)$:

$$f(0)=\frac{3\cdot 0+2}{0-1}=-2. \text{ Punt: } \boxed{(0,-2)}.$$

b) La recta que determina la funció cercada té el mateix pendent que la recta $y=-5x$ donada. Per tant, la funció cercada és del tipus $g(x)=-5\,x+b$. Llavors, si la recta ha de ser tangent, tindrà un únic punt de contacte amb la hipèrbola i l'equació que proporciona la coordenada x d'aquest punt

$$-5x+b=\frac{3x+2}{x-1}\,,$$

tindrà solució única. Aquesta condició ens donarà el valor de b.

$$-5x+b=\frac{3x+2}{x-1}\Longleftrightarrow -5x^2+5x-b=3x+2\Longleftrightarrow 5x^2-(2+b)x+b+2=0$$

Si la solució ha de ser única, el discriminant de l'equació anterior ha de ser 0. Per tant,

$$(2+b)^2 - 4\cdot 5(b+2) = 0 \Longrightarrow 4 + b^2 + 4b - 20b - 40 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \; b^2 - 16b - 36 = 0 \Longrightarrow b = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{1} = \frac{8 \pm 10}{1} = \left\langle \begin{array}{l} 18 \\ -2. \end{array}\right.$$

Consegüentment, les funcions cercades són $\boxed{\begin{array}{l} g(x) = -5x + 18 \\ g(x) = -5x - 2\,. \end{array}}$

4. Considereu el polinomi $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$.

a) Trobeu les arrels de $p(x)$ i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu, amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles, l'inequació $p(x) \geq 0$.

a) Un factor i una arrel s'obtenen de treure factor comú la x.

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = x(x^3 + 2x^2 + 2x + 1).$$

Apliquem la regla de Ruffini, per trobar una altra arrel i més factors. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent 1 d'aquest polinomi. En aquest cas es prova amb -1 i 1.

	1	2	2	1
-1		-1	-1	-1
	1	1	1	0

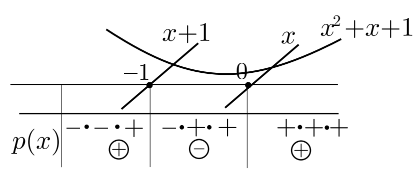
Una arrel del polinomi és $x = -1$ i observem que el polinomi quocient, $x^2 + x + 1$, té discriminant negatiu $[1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3]$.

Per tant, tenim la descomposició $\boxed{p(x) = x(x+1)(x^2+x+1)}$, i les arrels són $\boxed{-1 \text{ i } 0}$.

b) Presentem l'estudi del signe dels tres factors, dos de primer grau i un de segon:

D'aquí en resulta $\quad p(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \quad \text{o} \quad x \geq 0\,$, és a dir

$$\boxed{x \in]-\infty, -1\,] \cup [\,0, +\infty\,[}$$



5. Opereu i simplifiqueu l'expressió següent:

$$\frac{5x+2}{x^3 - x^2 - 2x} - \frac{3x+1}{x^3 - x}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - x^2 + 2x = x(x^2 - x + 2) \overset{(*)}{=} x(x+1)(x-2) \\ x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) \\ (*)\text{Les arrels de } x^2 - x + 2 \text{ són } -1 \text{ i } 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{m.c.m.} = x(x+1)(x-1)(x-2).$$

$$\begin{aligned} \frac{5x+2}{x^3 - x^2 - 2x} - \frac{3x+1}{x^3 - x} &= \frac{(5x+2)(x-1) - (3x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{(5x^2 - 3x - 2 - 3x^2 + 5x + 2}{x(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{2x^2 + 2x}{x(x+1)(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{2x(x+1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)} = \boxed{\frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}}. \end{aligned}$$