IES Pons d'Icart

Matemàtiques – 4t ESO B — 20/I/2005

Nombres i equacions – III — $3+3+3+2+2+3$

Alumnat que heu de recuperar. Heu de resoldre els nombres 1, 2, 3 i 4.
Alumnat que no heu de recuperar. Heu de resoldre els nombres 3, 4, 5 i 6.

1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{\dfrac{3}{7}-5\left(\dfrac{5}{21}-1\right)}{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{7}-1}$.

b) $\dfrac{0.001^5\cdot 10^5\cdot 100^{-3}}{2^{-16}\cdot 5^{-17}}$.

c) $\sqrt{108}-\dfrac{5}{\sqrt{75}}$.

d) $\dfrac{\sqrt[6]{a^9\,b^5}\ \ \sqrt[15]{a^{11}\,b^5}}{\sqrt[10]{a^3\,b^7}}$.

a) $$\dfrac{\dfrac{3}{7}-5\left(\dfrac{5}{21}-1\right)}{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{7}-1}=\dfrac{\dfrac{3}{7}-5\left(\dfrac{-16}{21}\right)}{\dfrac{8}{21}-1}=\dfrac{\dfrac{9}{21}+\dfrac{80}{21}}{\dfrac{8-21}{21}}=\dfrac{\dfrac{89}{21}}{\dfrac{-13}{21}}=\boxed{-\dfrac{89}{13}}.$$

b) $$\dfrac{0.001^5\cdot 10^5\cdot 100^{-3}}{2^{-16}\cdot 5^{-17}}=\left(10^{-3}\right)^5\cdot 10^5\cdot\left(10^2\right)^{-3}\cdot 10^{16}\cdot 5^1=10^{-15+5-6+16}\cdot 5=10^0\cdot 5=\boxed{5}.$$

c) $$\sqrt{108}-\dfrac{5}{\sqrt{75}}=6\sqrt{3}-\dfrac{5}{5\sqrt{3}}=6\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\boxed{\dfrac{17\sqrt{3}}{3}}.$$

d) $$\dfrac{\sqrt[6]{a^9\,b^5}\ \ \sqrt[15]{a^{11}\,b^5}}{\sqrt[10]{a^3\,b^7}}=a^{\frac{9}{6}+\frac{11}{15}-\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{5}{6}+\frac{5}{15}-\frac{7}{10}}=a^{\frac{45+22-9}{30}}\cdot b^{\frac{25+10-21}{30}}=a^{\frac{58}{30}}\cdot b^{\frac{14}{30}}=$$

$$=\sqrt[30]{a^{58}}\cdot\sqrt[30]{b^{14}}=\boxed{\sqrt[15]{a^{29}\,b^7}}.$$

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Definiu els nombres racionals a partir dels nombres enters i expliqueu quines característiques tenen les seves expressions decimals.

b) Una persona inverteix en borsa. El primer mes el seu capital augmenta el 18%, i el segon mes el capital resultant disminueix un 5% . Si després del segon mes el capital resultant és de 5156.6 euros, quin era el capital que va invertir inicialment?

c) Trobeu els valors de p tals que l'equació $x^2+p\,x-p=0$ té solució única.

a) Els nombre racionals són els que es poden expressar com una fracció de nombres enters amb el denominador diferent de zero. Les seves expressions racionals es caracteritzen per tenir un nombre finit de xifres decimals o bé un nombre infinit de xifres decimals que es repeteixen periòdicament.

b) $$\left.\begin{aligned} x &= \text{capital inicial}\\ 1.18\,x &= \text{capital al final del primer mes}\\ 0.95\cdot 1.18\,x &= \text{capital al final del segon mes}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow 0.95\cdot 1.18\,x=5156.6\text{ euros.}$$

O sigui que el capital inicial és

$$x = \frac{5156.6}{0.95 \cdot 1.18} = \boxed{4600 \text{ euros}}.$$

c) Que l'equació tingui solució única equival a dir que el seu discriminant compleix

$$p^2 + 4p = 0.$$

Llavors, $p(p+4) = 0 \iff \boxed{p = 0 \quad \text{o bé} \quad p = -4}$.

3. Resoleu les equacions següents:

a) $10x^2 - 8x - 2 = 0$. b) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$. c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$.

a) $$10x^2 - 8x - 2 = 0 \Longrightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{5} = \frac{2 \pm 3}{5} = \begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{\dfrac{-1}{5}} \end{cases}$$

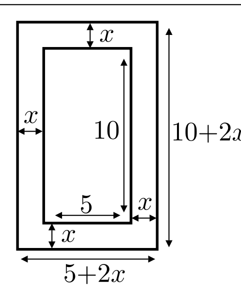
b) $$x^2 = z \Longrightarrow 4z^2 + 3z - 1 = 0 \Longrightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 = z = \dfrac{1}{4} & \Longrightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{2}} \\ x^2 = z = -1 & \Longrightarrow x \quad \text{no existeix.} \end{cases}$$

c) $$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x^2 + 4x + 4) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{o bé} \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bé} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = 0,\ x = -2.}.$$

4. Hem posat un marc rectangular a una fotografia de 5 cm $\times$ 10 cm. La superfície del marc, (no s'inclou la superfície de la foto), és de 54 cm. Calculeu l'amplada dels costats del marc si sabem que és la mateixa per a tots.



Considerem $x =$ Amplada dels costats del marc. Llavors, l'àrea total del marc de la foto és

$$(5 + 2x)(10 + 2x) = 5 \cdot 10 + 54.$$

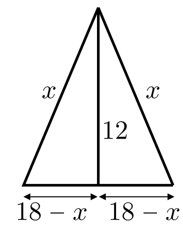
Actuem sobre aquesta equació i obtenim:

$$50 + 30x + 4x^2 = 104 \Longrightarrow 4x^2 + 30x - 54 = 0 \Longrightarrow 2x^2 + 15x - 27 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 216}}{4} = \frac{-15 \pm 21}{4} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -9. \end{cases}$$

Per tant, l'amplada del marc és de $\boxed{1.5 \text{ cm}}$.

5. Un triangle isòsceles té un perímetre de 36 unitats i l'altura sobre el costat desigual mesura 12 unitats. Calculeu les mesures dels seus costats.



Considerem $x =$ Longitud del costat repetit. Llavors, pel teorema de Pitàgoras, tenim

$$x^2 = (18-x)^2 + 12^2.$$

Actuem sobre l'equació i obtenim:

$$x^2 = 324 - 36x + x^2 + 144 \Longleftrightarrow 36x = 468 \Longleftrightarrow x = 13.$$

Per tant, els costats són de longituds $\boxed{13, 13 \text{ i } 10 \text{ cm}}$.

6. Resoleu:

a) $x - \sqrt{5x-2} + \dfrac{4}{5} = 0.$ b) $\left\{ \begin{array}{c} x\,y = 3 \\ \dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{1}{9}\,y = \dfrac{1}{2}\,. \end{array} \right.$

a) $$x - \sqrt{5x-2} + \frac{4}{5} = 0 \Longleftrightarrow 5x + 4 = 5\sqrt{5x-2} \Longrightarrow 25x^2 + 16 + 40x = 125x - 50 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 25x^2 - 85x + 66 = 0 \Longrightarrow x = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 6600}}{50} = \frac{85 \pm 25}{50} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{11}{5}} \\ \boxed{\dfrac{6}{5}}\,. \end{array} \right.$$

Les dues solucions són bones perquè satisfan l'equació inicial. Efectivament,

$$\begin{aligned} x = \frac{11}{5} \quad &\Longrightarrow \frac{11}{5} - \sqrt{11-2} + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} - 3 = 0. \\ x = \frac{6}{5} \quad &\Longrightarrow \frac{6}{5} - \sqrt{6-2} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} - 2 = 0. \end{aligned}$$

b) $$\left\{ \begin{array}{c} x\,y = 3 \\ \dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{1}{9}\,y = \dfrac{1}{2}\,. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x\,y = 3 \\ 27x - 2y = 9 \end{array} \right. \Longrightarrow x(27x-9) = 6 \Longrightarrow 27x^2 - 9x - 6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9x^2 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{3 \pm 9}{18} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{2}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{3}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{-1}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{3}{\frac{-1}{3}} = -9 \end{array} \right.$$

Per tant, les solucions són $\boxed{x = \dfrac{2}{3}\,,\ y = \dfrac{9}{2}}$ i $\boxed{x = -\dfrac{1}{3}\,,\ y = -9}$.