

1. Resoleu:

$$\text{a) } 3x - \sqrt{6x - 13} = 14. \quad \text{b) } \begin{cases} 2xy = 5 \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x - \sqrt{6x - 13} = 14 &\implies (3x - 14)^2 = 6x - 13 \implies 9x^2 - 84x + 196 = 6x - 13 \implies \\ &\implies 9x^2 - 90x + 209 = 0 \implies x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1881}}{9} = \frac{45 \pm 12}{9} = \begin{cases} \frac{19}{3} \\ \frac{11}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

La solució és $x = \boxed{\frac{19}{3}}$. Efectivament, $\begin{cases} x = \frac{19}{3} \implies 19 - \sqrt{38 - 13} = 19 - 5 = 14. \\ x = \frac{11}{3} \implies 11 - \sqrt{22 - 13} = 11 - 3 = 8 \neq 14. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} 2xy = 5 \\ x + 2y = 6. \end{cases} &\implies \begin{cases} 2xy = 5 \\ 2y = 6 - x. \end{cases} \implies x(6 - x) = 5 \implies x^2 - 6x + 5 = 0 \implies \\ &\implies x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 5}}{1} = \frac{3 \pm 2}{1} = \begin{cases} 5 \implies y = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ 1 \implies y = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Per tant, les solucions són $\boxed{x = 5, y = \frac{1}{2}}$ i $\boxed{x = 1, y = \frac{5}{2}}$.

2. Un grup d'alumnes ha de pagar per un viatge en autocar 525 euros. Pocs dies abans del viatge 7 alumnes es donen de baixa i no paguen la seva part. D'això en resulta que cadascun dels alumnes restants ha d'afegir 2.5 euros al preu que havia de pagar. Trobeu el nombre d'alumnes que havien d'anar inicialment al viatge i quan havia de pagar cadascun d'ells.

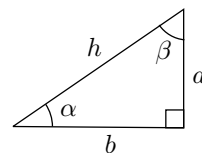
Anomenem $\begin{cases} x = \text{nombre inicial d'alumnes} \\ y = \text{pagament inicial de cada alumne} \end{cases}$. Llavors, $\begin{cases} x \cdot y = 525 \\ (x - 7) \cdot (y + 2.5) = 525. \end{cases}$

Resolem el sistema per substitució:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \cdot y = 525 \\ xy + 2.5x - 7y - 17.5 = 525. \end{cases} &\iff \begin{cases} x \cdot y = 525 \\ 2.5x - 7y = 17.5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \cdot y = 525 \\ 5x - 14y = 35. \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x \cdot y = 525 \\ y = \frac{5x - 35}{14}. \end{cases} \iff x \cdot \frac{5(x - 7)}{14} = 525 \iff x^2 - 7x = \frac{525 \cdot 14}{5} \iff \\ &\iff x^2 - 7x - 1470 = 0 \iff x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 5880}}{2} = \frac{7 \pm 77}{2} = \begin{cases} 42 \\ -35 \end{cases} \end{aligned}$$

És a dir, inicialment hi havia $\boxed{42 \text{ alumnes}}$ que pagaven $\frac{525}{42} = \boxed{12.5 \text{ euros}}$.

3. Considereu el triangle rectangle adjunt, d'angles aguts α i β , catets a i b , i hipotenusa h .



- Justifiqueu, amb l'ajut del teorema de Pitàgoras, que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- Suposem que $\sin \alpha = \frac{7}{25}$. Utilitzeu el resultat de l'apartat (a) per calcular $\cos \alpha$ i $\tan \alpha$, sense utilitzar les funcions trigonomètriques de la calculadora.
- Finalment, si suposem que $b = 7$ i $a = 4$, utilitzeu la calculadora per trobar el valor dels angles α i β en graus, minuts i segons.

a) Si observem el triangle adjunt podem escriure:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{h^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

(*) Hem aplicat el teorema de Pitàgoras al numerador .

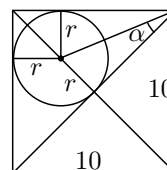
b) De la igualtat anterior obtenim $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Per tant,

$$\sin \alpha = \frac{7}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}.$$

$$c) \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{\alpha = 29^\circ 44' 41.57''} \text{ i } \boxed{\beta = 90 - \alpha = 60^\circ 15' 18.43''}.$$

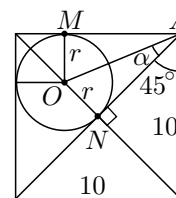
Resoleu una i només una de les qüestions següents:

4A. Observeu la figura adjunta i calculeu raonadament l'angle α i el radi r de la circumferència.

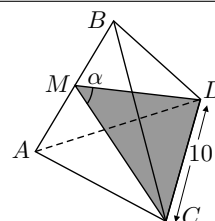


Per la igualtat dels triangles $\triangle AOM$, $\triangle AON$, tenim: $2\alpha = 45^\circ$. Per tant, $\boxed{\alpha = 22^\circ 30'}$. Llavors, en ser $AN = 10 \cos 45^\circ$, del triangle $\triangle AON$ s'obté

$$r = AN \cdot \tan 22^\circ 30' = 10 \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 22^\circ 30' \approx \boxed{2.9289}.$$



4B. Observeu el tetraedre regular adjunt, en què M és el punt mitjà de l'aresta AB . Calculeu els valors de la longitud CM i de l'angle α .



Pel teorema de Pitàgoras, en el triangle $\triangle CMA$ es compleix $CM = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3}}$. Llavors, del triangle $\triangle CMD$ s'obté

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 35^\circ 51' 51.8'' \Rightarrow \boxed{\alpha = 70^\circ 31' 43.61''}.$$

