IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B — 31/III/2005
Equacions i trigonometria. Recuperació — $3 + 2 + 2 + (0.25 + 0.75 + 1 + 1)$

1. Resoleu:

a) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2} = 1.$ b) $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = \dfrac{25}{16} \\ 4x + 3y = 0\,. \end{cases}$

a) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2} = 1 \iff 2x - 3 = 1 + x + 2 + 2\sqrt{x+2} \iff x - 6 = 2\sqrt{x+2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x^2 - 12x + 36 = 4x + 8 \Longrightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{1} = \frac{8 \pm 6}{1} = \begin{cases} 14 \\ 2. \end{cases}$$

La solució és $\boxed{x = 14}$. Efectivament, $\begin{cases} x = 14 & \Longrightarrow \sqrt{28-3} - \sqrt{14+2} = 5 - 4 = 1. \\ x = 2 & \Longrightarrow \sqrt{4-3} - \sqrt{2+2} = 1 - 2 = -1 \neq 1. \end{cases}$

b) $$\begin{cases} x^2 + 8y^2 = \dfrac{25}{16} \\ 4x + 3y = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 8y^2 = \dfrac{25}{16} \\ y = -\dfrac{4x}{3}\,. \end{cases} \Longrightarrow x^2 + 16x^2 = \frac{25}{16} \Longrightarrow 17x^2 = \frac{25}{16} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} \dfrac{5}{4\sqrt{17}} \Longrightarrow y = -\dfrac{5}{3\sqrt{17}} \\ -\dfrac{5}{4\sqrt{17}} \Longrightarrow y = \dfrac{5}{3\sqrt{17}}\,. \end{cases}}$$

2. Un tractor tarda una hora en llaurar un camp rectangular. Si el tractor llaura 100 m^2 cada minut i el perímetre del camp és de 346 m, calculeu les longituds dels seus costats.

Anomenem x i y les longituds dels costats del camp rectangular. Llavors, s'ha de complir

$$\begin{aligned} \text{Semiperímetre} &= x + y = 173 \\ \text{Àrea} &= x \cdot y = 100 \cdot 60 = 6000. \end{aligned}$$

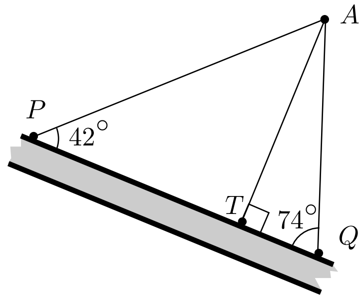
Si substituïm la incògnita y de la primera equació en la segona equació, s'obté

$$y = 173 - x \quad \Longrightarrow \quad x(173 - x) = 6000 \Longrightarrow x^2 - 173x + 6000 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{173 \pm \sqrt{29929 - 24000}}{2} = \frac{173 \pm 77}{2} = \begin{cases} 125 \\ 48. \end{cases}$$

Així tenim, $x = 125 \Longrightarrow y = 173 - 125 = 48$, i $x = 48 \Longrightarrow y = 173 - 48 = 125$. Per tant, el rectangle cercat és el de costats $\boxed{125 \text{ i } 48}$.

3. Un poble A s'observa des de dos punts P i Q d'una carretera sota uns angles de $42°$ i $74°$. Si la distància entre P i Q és d'1 km, quina és la mínima distància del poble al tram de carretera entre P i Q? Indicació: Us pot ser útil introduir la incògnita $x = QT$.



Anomenem $y = AT$ i $x = TQ$. Si observem els triangles rectangles $\triangle ATQ$ i $\triangle ATP$, s'obté

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 74° = \dfrac{y}{x} \\ \tan 42° = \dfrac{y}{1000 - x} \end{array} \right. \implies (1000 - x)\tan 42° = x \tan 74°$$

$$\implies x(\tan 74° + \tan 42°) = 1000 \tan 42° \implies$$

$$\implies x = \frac{1000 \tan 42°}{\tan 74° + \tan 42°} \implies y = \frac{1000 \tan 42° \tan 74°}{\tan 74° + \tan 42°} = \boxed{715.6 \text{ m}}.$$

4. Considereu un triangle rectangle qualsevol de catets de longituds a i b i hipotenusa c. Sigui α l'angle oposat al catet a.

a) Definiu $\cos\alpha$ i $\tan\alpha$.

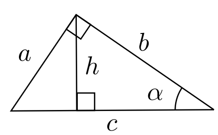
b) Justifiqueu que $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$.

c) Trobeu el valor de la longitud de l'altura que va del vèrtex de l'angle recte a la hipotenusa, en funció de a, b i c.

d) Suposeu que $b = 10$ i $c = 12$. Calculeu el valor de l'angle α en graus, minuts i segons.

a) $$\cos\alpha = \frac{\text{catet adjacent a l'angle } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{catet adjacent a l'angle } \alpha}{\text{catet oposat a l'angle } \alpha} = \frac{a}{b}$$



b) $$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{(b/c)^2} = \frac{c^2}{b^2} \overset{(*)}{=} \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \tan^2\alpha + 1.$$

$(*)$ Pel teorema de Pitàgoras.

c) Si observem els triangles rectangles de la figura adjunta en què h és l'altura de l'enunciat obtenim

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \sin\alpha = b \cdot \frac{a}{c} \implies \boxed{h = \frac{a \cdot b}{c}}.$$

d) $$\cos\alpha = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \implies \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \boxed{33° \, 33' \, 26.32''}.$$