IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B — 26/IV/2005
Funcions I — (1.75+0.75+1+1+1+0.5)+(0.25+0.5 × 3)+2.25

1. Considereu les funcions $f(x) = -2x + 2$ i $g(x) = -x^2 + x + 6$.

a) Trobeu els talls dels seus gràfics amb els eixos i el vèrtex de la paràbola determinada per la funció g.

b) Representeu gràficament les dues funcions sobre els mateixos eixos de coordenades.

c) Calculeu $g(-3)$ i $g^{-1}(4)$.

d) Calculeu els punts d'intersecció dels gràfics de les funcions f i g.

e) Calculeu la màxima separació vertical entre els gràfics de f i g a l'interval determinat pels punts resultants de l'apartat anterior.

f) Calculeu el domini de la funció $s(x) = \sqrt{g(x)}$.

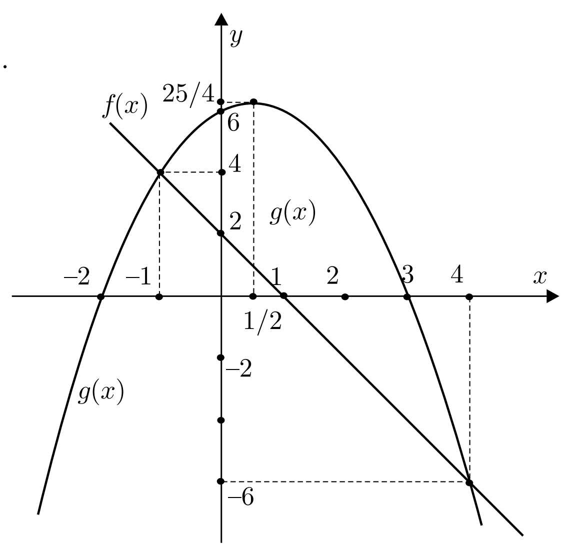
a) i b) Talls OX de $g(x)$:

$$0 = g(x) = -x^2 + x + 6 \Longleftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 3. \end{cases}$$

Punts: $\boxed{(-2, 0)\ ,\ (3, 0)}$.

Tall OY de $g(x)$: $g(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6$. Punt: $\boxed{(0, 6)}$.

Vèrtex del gràfic de $g(x)$:



$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} \Longrightarrow y_V = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}.$$

Vèrtex: $\boxed{\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{25}{4}\right)}$.

Tall OX de $f(x)$:

$$0 = f(x) = -2x + 2 \Longleftrightarrow x = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Punt: $\boxed{(1\ ,\ 0)}$.

Tall OY de $f(x)$:

$$f(0) = -2 \cdot 0 + 2. \text{ Punt: } \boxed{(0, 2)}.$$

c) $g(-3) = -(-3)^2 + (-3) + 6 = -9 - 3 + 6 = \boxed{-6}$.

$$x = g^{-1}(4) \Longleftrightarrow 4 = -x^2 + x - 6 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1. \end{cases} \Longleftrightarrow g^{-1}(4) = \boxed{\{-1, 2\}}.$$

d) Els gràfics es tallen en els punts x que tenen les imatges $f(x)$ i $g(x)$ iguals. És a dir, s'ha d'imposar la condició $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad -2x + 2 = -x^2 + x + 6 \Longleftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad y = \begin{cases} g\,(4) = -2 \cdot 4 + 2 = -6 \\ \\ g(-1) = -2 \cdot (-1) + 2 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Punts d'intersecció: } \boxed{(-1, 4),\ (4, -6)}\,.$$

e) Atenent al gràfic i als punts d'intersecció dels gràfics, cal estudiar el valor màxim de la funció

$$d(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 3x + 4, \text{ a l'interval } -1 \le x \le 4.$$

En ser el gràfic de $d(x)$ una paràbola amb les branques avall, el valor màxim ve determinat pel vèrtex. Sabem que la seva abscissa és el punt mitjà dels dos punts de tall amb l'eix OX. Per tant,

$$d(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = f(x) \Longrightarrow x = -1 \text{ o } x = 4 \Longrightarrow x_v = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}.$$

Llavors, el valor de la màxima separació és

$$d\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \boxed{\frac{25}{4}}\,.$$

f) Per a que x sigui del domini s'ha de complir que $-x^2 + x - 6 \ge 0$. Aquesta condició és satisfeta per les abscisses dels punts del gràfic de g que es troben situats en el semiplà superior determinat per l'eix OX. Per tant,

$$\operatorname{Dom} s = \{x \text{ tals que } -1 \le x \le 4\}.$$

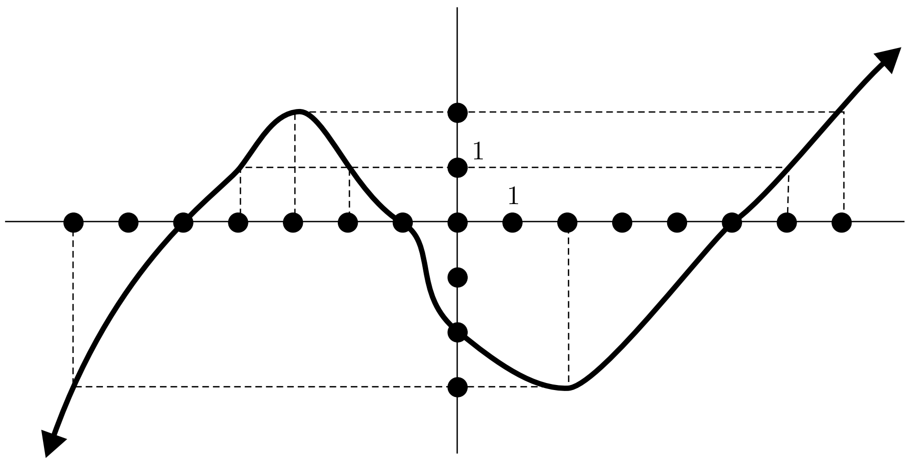
2. Observeu el gràfic adjunt d'una funció $f(x)$ i trobeu:

a) $f(0)$, $f(-5)$ i $f(7)$.

b) $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(1)$ i $f^{-1}(0)$.

c) Els punts x tals que $f(x) < 0$.

d) Els màxims locals.



a) $f(0) = -2,\ f(-5) = 0,\ f(7) = 2$.

b) $f^{-1}(2) = \{-3, 7\},\ f^{-1}(1) = \{-4, -2, 6\},\ f^{-1}(0) = \{-5, -1, 5\}$.

c) $x < -5$ o $-1 < x < -5$.

d) Hi ha un màxim local en $x = -3$ i el seu valor és $f(-3) = 2$.

3. El lloguer d'un autocar d'una empresa A costa 60 euros de sortida i 2 euros per kilòmetre recorregut. En un a empresa B costa 75 euros de sortida més 1.8 euros per kilòmetre recorregut. Trobeu

a) Les funcions $A(x)$ i $B(x)$ que donen el cost del lloguer en funció dels kilòmetres recorreguts i representeu-les gràficament.

b) Per a quins valors dels kilòmetres recorreguts surt més bé de preu contractar l'empresa B.

a) Sigui x el nombre de km recorreguts. Llavors,

$$A(x) = 60 + 2x \quad \text{i} \quad B(x) = 75 + 1.8x$$

b) Surt més bé de preu contractar l'empresa B quan es satisfà $B(x) < A(x)$. Això equival a:

$$75 + 1.8x < 60 + 2x \Longleftrightarrow 15 < 0.2x$$
$$\Longleftrightarrow \frac{15}{0.2} < x \Longleftrightarrow \boxed{x > 75\text{km}}$$