1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{7-\dfrac{4}{3}\cdot 5}{7-3\left(\dfrac{4}{9}-5\right)}$.

b) $\dfrac{0.01^{10}\cdot 5^{10}\cdot 1024}{10^{-10}}$.

c) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\sqrt{125}$.

d) $\dfrac{\sqrt[6]{a^7\,b^2}\;\sqrt[5]{a^3\,b}}{\sqrt[10]{a^3\,b^8}}$.

a) $$\dfrac{7-\dfrac{4}{3}\cdot 5}{7-3\left(\dfrac{4}{9}-5\right)}=\dfrac{7-\dfrac{20}{3}}{7-3\left(-\dfrac{41}{9}\right)}=\dfrac{\dfrac{21-20}{3}}{7+\dfrac{41}{3}}=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{62}{3}}=\boxed{\dfrac{1}{62}}.$$

b) $$\dfrac{0.01^{10}\cdot 5^{10}\cdot 1024}{10^{-10}}=\dfrac{\left(10^{-2}\right)^{10}\cdot 5^{10}\cdot 2^{10}}{10^{-10}}=\dfrac{10^{-20}\cdot 10^{10}}{10^{-10}}=10^{-20+10+10}=10^0=\boxed{1}.$$

c) $$\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\sqrt{125}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\sqrt{5^3}=\sqrt{5}+5\sqrt{5}=\boxed{6\sqrt{5}}.$$

d) $$\dfrac{\sqrt[6]{a^7\,b^2}\;\sqrt[5]{a^3\,b}}{\sqrt[10]{a^3\,b^8}}=a^{\frac{7}{6}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{6}+\frac{1}{5}-\frac{8}{10}}=a^{\frac{35+18-9}{30}}\cdot b^{\frac{10+6-24}{30}}=a^{\frac{44}{30}}\cdot b^{-\frac{8}{30}}=\dfrac{\sqrt[15]{a^{22}}}{\sqrt[15]{b^4}}=$$
$$=\dfrac{\sqrt[15]{a^{22}}}{\sqrt[15]{b^4}}\cdot\dfrac{\sqrt[15]{b^{11}}}{\sqrt[15]{b^{11}}}=\dfrac{\sqrt[15]{a^{22}\,b^{11}}}{b}=\boxed{\dfrac{a\,\sqrt[15]{a^7\,b^{11}}}{b}}.$$

2. Un capital desconegut està sotmès a un interès anual del 6%, mentre que un altre capital que el supera en 2000 euros està sotmès a un interès anual del 4%. Si, passat un any, el capital final que s'obté en els dos casos és el mateix, quins eren els dos capitals inicials.

Anomenem $\begin{cases} x = \text{Capital inicial sotmès al 6\%.}\\ x+2000 = \text{Capital inicial sotmès al 4\%.}\end{cases}$

Llavors, $\begin{cases} 1.06\,x = \text{Capital final en què es converteix } x \text{ al cap d'un any.}\\ 1.04(x+2000) = \text{Capital final en què es converteix } x+2000 \text{ al cap d'un any.}\end{cases}$

Per tant, si han de ser iguals, tenim:

$$1.06\,x=1.04(x+2000)\implies(1.06-1.04)\,x=1.04\cdot 2000\implies$$
$$\implies 0.02\,x=2080\implies x=\dfrac{2080}{0.02}=\dfrac{1040}{0.01}=104000.$$

O sigui que els capitals inicials eren $\boxed{\text{104000 i 106000 euros}}$.

3. Partim de la hipòtesi que no coneixem la fórmula de resolució d'equacions de segon grau en què s'utilitzen les operacions aritmètiques i el càlcul de radicals. Resoleu les equacions següents:

a) $(3x-5)(x+33)=0.$ b) $x^2+4x-96=0.$

a) $(3x-5)(x+33)=0 \Longrightarrow 3x-5=0 \quad \text{o} \quad x+33=0 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{5}{3},\ x=-33}.$

b) $$x^2+4x-96=0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} (x+2)^2-4-96=0 \Longleftrightarrow (x+2)^2=100 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x+2=\pm\sqrt{100}=\pm 10 \Longleftrightarrow x=\pm 10-2= \begin{cases} \boxed{8} \\ \boxed{-12}. \end{cases}$$

$(*)$ Observeu que $(x+2)^2-4=(x^2+4x+4)-4=x^2+4x.$

4. Resoleu les qüestions següents:

a) Raoneu quin tipus de nombre és el producte de dos nombres racionals.

b) Trobeu el valor de $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$, sense calculadora.
Indicació: En primer lloc calculeu x^2 i després deduïu-ne el valor de x.

c) Escriviu, explicant el procés seguit, una equació de segon grau $x^2+bx+c=0$ que no tingui cap solució, i en la qual $b \neq 0$.

a) El producte és racional perquè en multiplicar dues fraccions, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, de numerador i denominador enters, s'obté una altra fracció $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ en què el numerador i el denominador també són enters.

b) $$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} \Longrightarrow x^2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=$$
$$=4+2\sqrt{4-3}=4+2=6 \Longrightarrow \boxed{x=\sqrt{6}}.$$

c) Partiré del fet que no hi ha cap número que elevat al quadrat doni resultat negatiu. Així podrem fabricar infinitat d'equacions; per exemple, l'equació que resulta en el procés següent no tindrà solució:

$$(x+3)^2=-2 \Longleftrightarrow x^2+6x+9=-2 \Longleftrightarrow \boxed{x^2+6x+11=0}.$$