IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B — 30/XI/2004
Nombres i equacions – II — $3+3+2+3$

1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{5-3\left(\dfrac{6}{14}+4\right)}{5-\dfrac{6}{21}\cdot 4}$.

b) $\dfrac{0.001^5\cdot 2^5\cdot 15625}{10^{-12}}$.

c) $\sqrt{150}-\dfrac{12}{\sqrt{6}}$.

d) $\dfrac{\sqrt[8]{x^9\,y^2}\;\sqrt[12]{x^2\,y^5}}{\sqrt[6]{x^3\,y^5}}$.

a) $$\frac{5-3\left(\dfrac{6}{14}+4\right)}{5-\dfrac{6}{21}\cdot 4}=\frac{5-3\cdot\dfrac{3+28}{7}}{5-\dfrac{2\cdot 4}{7}}=\frac{5-\dfrac{3\cdot 31}{7}}{5-\dfrac{8}{7}}=\frac{\dfrac{35-93}{7}}{\dfrac{35-8}{7}}=\boxed{-\frac{58}{27}}.$$

b) $$\frac{0.001^5\cdot 2^5\cdot 15625}{10^{-12}}=\frac{(10^{-3})^5\cdot 2^5\cdot 5^6}{10^{-12}}=\frac{10^{-15}\cdot 10^5\cdot 5}{10^{-12}}=10^{-15+5+12}\cdot 5=10^2\cdot 5=\boxed{500}.$$

c) $$\sqrt{150}-\frac{12}{\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-\frac{12}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-\frac{12\sqrt{6}}{6}=5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=\boxed{3\sqrt{6}}.$$

d) $$\frac{\sqrt[8]{x^9\,y^2}\;\sqrt[12]{x^2\,y^5}}{\sqrt[6]{x^3\,y^5}}=x^{\frac{27}{24}+\frac{4}{24}-\frac{12}{24}}\cdot y^{\frac{6}{24}+\frac{10}{24}-\frac{20}{24}}=x^{\frac{19}{24}}\cdot y^{\frac{-4}{24}}=\frac{\sqrt[24]{x^{19}}}{\sqrt[24]{y^4}}=$$
$$=\frac{\sqrt[24]{x^{19}}}{\sqrt[24]{y^4}}\cdot\frac{\sqrt[24]{y^{20}}}{\sqrt[24]{y^{20}}}=\boxed{\frac{\sqrt[24]{x^{19}\,y^{20}}}{y}}.$$

2. Resoleu les equacions següents:

a) $4x^2+23x+15=0$. b) $x^4-12x^2+27=0$. c) $x^3+x^2+2x=0$.

a) $$4x^2+23x+15=0\Longrightarrow x=\frac{-23\pm\sqrt{529-240}}{8}=\frac{-23\pm 17}{8}=\begin{cases}\boxed{-\dfrac{3}{4}}\\[1ex] \boxed{-5}\end{cases}$$

b) $$x^2=z\ \Longrightarrow z^2-12z+27=0\Longrightarrow z=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{1}=\frac{6\pm 3}{1}=\begin{cases}9\\ 3\end{cases}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\begin{cases}x^2=z=9\ \Longrightarrow \boxed{x=3,\ x=-3}\\ x^2=z=3\ \Longrightarrow \boxed{x=\sqrt{3},\ x=-\sqrt{3}}\end{cases}$$

c) $\quad x^3+x^2+2x=0 \implies x(x^2+x+2)=0 \implies \begin{cases} x=0 \\ \text{o bé} \\ x^2+x+2=0 \end{cases}$

L'única solució és $\boxed{x=0}$, perquè la segona equació no té solucions en ser el seu discriminant $1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$.

3. En un triangle rectangle la mesura d'un catet és 23 unitats més gran que la de l'altre catet. Si la hipotenusa mesura 37 unitats, calculeu la mesura dels catets plantejant una equació de segon grau.

Anomenem $\begin{cases} x & = \text{Longitud d'un catet.} \\ x+23 & = \text{Longitud de l'altre catet.} \end{cases}$

Llavors, apliquem el teorema de Pitàgoras i obtenim

$$x^2+(x+23)^2=37^2 \implies 2x^2+46x+529-1369=0 \implies 2x^2+46x-840=0 \implies$$

$$\implies x^2+23x-420=0 \implies x=\frac{-23\pm\sqrt{529+1680}}{2}=\frac{-23\pm47}{2}= \begin{cases} 12 \\ -35. \end{cases}$$

Per tant, els catets mesuren $\boxed{12}$ i $12+23=\boxed{35}$.

4. Resoleu les qüestions següents:

a) Raoneu quin tipus de nombre és $\sqrt{2}$.

b) Una persona inverteix el 36% del seu sou en pagar una hipoteca, i el 30% del que li queda en despeses fixes. Un cop descomptades aquestes quantitats li queden 967.68 euros. Quin era el seu sou?

c) Raoneu per a quins valors de k l'equació $kx^2+kx-k=0$ té alguna solució.

a) $\quad\sqrt{2}$ és un nombre irracional perquè vam demostrar que si suposàvem que era racional i l'escrivíem com una fracció irreductible d'enters obteníem la contradicció que la fracció no era irreductible (concretament obteníem un nombre que era parell i imparell). En no ser això possible l'arrel de 2 era irracional.

b) $\quad$Anomenem $x=$ sou de la persona. Després de pagar la hipoteca li queda el 64% del sou, i després de pagar les despeses fixes li queda el 70% del 64% del sou. Per tant,

$$0.70\cdot0.64\cdot x=967.68 \text{ euros} \implies x=\frac{967.68}{0.7\cdot0.64}=\boxed{2160 \text{ euros}}.$$

c) $\quad$Per a que existeixi alguna solució, el discriminant Δ ha de ser major o igual que zero. En ser $\Delta=k^2+4k^2=5k^2\geq0$ per a qualsevol valor de k, podem afirmar que:

$$\boxed{\text{l'equació té alguna solució per a tots els valors de } k.}$$