1. Resoleu l'equació $x^2 - 3x - 18 = 0$ mitjançant:

a) La fórmula general de resolució de les equacions de segon grau.

b) El mètode de completar quadrats.

a) Observem que els coeficients dels diferents termes són $a = 1$, $b = -3$ i $c = -18$. Per tant,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} \boxed{6} \\ \boxed{-3}. \end{cases}$$

b) Hem de completar $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$,

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 18 = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \iff x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \pm\frac{9}{2}$$

$$\iff x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} = \begin{cases} \boxed{6} \\ \boxed{-3}. \end{cases}$$

2. La suma de dos nombres diferents és igual a la suma dels seus quadrats.

a) Si sabem que un dels nombres és igual a tres vegades l'altre, calculeu els dos nombres.

b) Considereu totes les parelles de nombres que tenen la propietat de l'enunciat inicial sense que forçosament satisfaguin la condició de l'apartat (a). Trobeu tots els possibles valors de les diferències entre els dos membres de cada parella. **Indicació:** Si anomeneu x, $x + k$, els membres de la parella, la seva diferència és k.

a) Siguin x i y els dos nombres. Per les condicions de l'enunciat tenim

$$\left.\begin{array}{r} x + y = x^2 + y^2 \\ y = 3x \end{array}\right\} \implies x + 3x = x^2 + (3x)^2 \implies 4x = 10x^2 \implies 10x^2 - 4x = 0$$

$$\implies 2x(5x - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0,\ y = 0, & \text{no pot ser perquè són iguals.} \\ 5x - 2 = 0 \implies \boxed{x = \frac{2}{5},\ y = \frac{6}{5}}. \end{cases}$$

Comprovació: $\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$, i $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{36}{25} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$.

b) Siguin k la diferència entre els dos nombres i x i $x + k$ els dos nombres. Llavors,

$$x + x + k = x^2 + (x + k)^2 \iff 2x + k = 2x^2 + 2kx + k^2 \iff 2x^2 + 2(k - 1)x + k^2 - k = 0.$$

Per tal que existeixi solució el discriminant de l'equació ha de ser no negatiu, és a dir,

$$4(k - 1)^2 - 8k^2 + 8k \geq 0 \iff 4k^2 - 8k + 4 - 8k^2 + 8k \geq 0 \iff k^2 \leq 1 \iff \boxed{-1 \leq k \leq 1}.$$

3. Resoleu les equacions: a) $3x^4+13x^2-10=0$. b) $4x+\sqrt{2x+10}+10=0$.

a) Anomenem $x^2=t$. Llavors, $x^4=t^2$, i en resulta una equació de segon grau:

$$3t^2+13t-10=0 \iff t=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{6}=\frac{-13\pm 17}{6}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\\ -5.\end{cases}$$

Llavors, $x^2=t=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Longrightarrow \boxed{x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\\ -5\Longrightarrow x=\pm\sqrt{-5}\Longrightarrow \text{no és un nombre real.}\end{cases}$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{2x+10}=-4x-10 &\iff 2x+10=(-4x-10)^2\Longrightarrow 2x+10=16x^2+80x+100\\ &\Longrightarrow 16x^2+78x+90=0\Longrightarrow 8x^2+39x+45=0\\ &\Longrightarrow x=\frac{-39\pm\sqrt{1521-1440}}{16}=\frac{-39\pm 9}{16}=\begin{cases}-\dfrac{15}{8}\\ -3\end{cases}\end{aligned}$$

Comprovació:
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ 4\cdot\dfrac{-15}{8}+\sqrt{2\cdot\dfrac{-15}{8}+10}+10=\dfrac{-15}{2}+\sqrt{\dfrac{25}{4}}+10=5\neq 0\\ \bullet\ 4\cdot(-3)+\sqrt{2\cdot(-3)+10}+10=-12+\sqrt{4}+10=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \boxed{x=-3}.$$

4. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot 7}{2-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{4}}$. b) $\dfrac{0.001^{-3}}{0.25^{\frac{1}{2}}\cdot 10^8}$. c) $\sqrt{45}-\dfrac{\sqrt{125}}{1+\sqrt{5}}$. d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\,b}\,\sqrt[6]{a\,b^2}}{\sqrt{a^7\,b^3}}$.

a) $$\frac{\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot 7}{2-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{4}}=\frac{\dfrac{35}{48}-\dfrac{7}{2}}{2-\dfrac{1}{8}}=\frac{\dfrac{35-168}{48}}{\dfrac{15}{8}}=\frac{-133\cdot 8}{48\cdot 15}=\frac{-133}{6\cdot 15}=\boxed{-\frac{133}{90}}.$$

b) $$\frac{0.001^{-3}}{0.25^{\frac{1}{2}}\cdot 10^8}=\frac{\left(10^{-3}\right)^{-3}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}}\cdot 10^8}=\frac{10^9}{\dfrac{1}{2}\cdot 10^8}=\frac{10}{\dfrac{1}{2}}=10\cdot 2=\boxed{20}.$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{45}-\frac{\sqrt{125}}{1+\sqrt{5}}&=3\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}=3\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}-25}{1-5}\\ &=3\sqrt{5}+\frac{5}{4}\sqrt{5}-\frac{25}{4}=\boxed{\frac{17\sqrt{5}-25}{4}}.\end{aligned}$$

d) $$\frac{\sqrt[4]{a^3\,b}\,\sqrt[6]{a\,b^2}}{\sqrt{a^7\,b^3}}=\sqrt[12]{\frac{a^9b^3a^2b^4}{a^{42}b^{18}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a^{31}b^{11}}}\cdot\frac{\sqrt[12]{a^5b}}{\sqrt[12]{a^5b}}=\frac{\sqrt[12]{a^5b}}{\sqrt[12]{a^{36}b^{12}}}=\boxed{\frac{\sqrt[12]{a^5b}}{a^3b}}.$$

5. En un poble, hi ha 2520 persones que llegeixen habitualment algun dels dos diaris que s'hi editen, *La Veu* i *La Paraula*. D'aquestes persones el 65% llegeixen el diari *La Veu* i el 42.5% llegeixen el diari *La Paraula*. Calculeu quantes d'aquestes persones llegeixen els dos diaris.

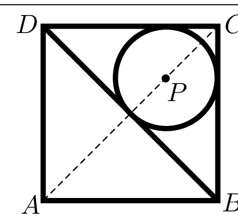
Nombre de persones que llegeixen el diari *La Veu*: $0.65 \cdot 2520 = 1638$.
Nombre de persones que llegeixen el diari *La Paraula*: $0.425 \cdot 2520 = 1071$.

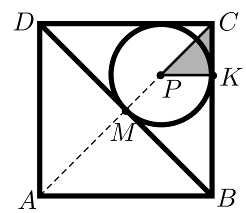
Les 2520 persones que llegeixen algun diari, o bé formen part dels que llegeixen únicament *La Veu*, o bé dels que llegeixen únicament *La paraula*, o bé dels que llegeixen els dos diaris. Els que llegeixen els dos diaris estan comptats dues vegades i el seu nombre és

$$1638 + 1071 - 2520 = \boxed{189}.$$

Trigonometria

6. Calculeu la distància AP en el quadrat de la figura adjunta, en què el costat AB mesura 1. Sabem que la circumferència està inscrita en el triangle BCD i que P és el seu centre.





Tenim en compte que $AB = 1 \Longrightarrow AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ i $AM = \sqrt{2}/2$.
Anomenem $AP = x$.

Resolució 1, (trigonometria):

Considerem el triangle PKC. Observem que $\cos 45° = \dfrac{PK}{PC} = \dfrac{PM}{PC}$. Per tant,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} - x} \Longleftrightarrow 2 - \sqrt{2}\,x = 2x - \sqrt{2} \Longleftrightarrow (2 + \sqrt{2})x = 2 + \sqrt{2} \Longleftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Longleftrightarrow \boxed{x = 1}.$$

Resolució 2, (teorema de Pitàgoras):

Apliquem el teorema de Pitàgoras sobre el triangle rectangle PKC:

$$\begin{aligned} PC^2 = PK^2 + KC^2 &\Longleftrightarrow \left(\sqrt{2} - x\right)^2 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow 2 + x^2 - 2\sqrt{2}\,x = 2x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 \Longleftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1}. \end{aligned}$$

Resolució 3, (semblança de triangles):

Els triangles PKC i ABC són semblants perquè tenen els mateixos angles. Per tant, els costats són proporcionals, (tindrem en compte que $PK = PM$):

$$\begin{aligned} \frac{PC}{AC} = \frac{PK}{AB} &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Longleftrightarrow \sqrt{2} - x = \sqrt{2}\,x - 1 \\ &\Longleftrightarrow x + \sqrt{2}\,x = \sqrt{2} + 1 \Longleftrightarrow x(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \Longleftrightarrow \boxed{x = 1}. \end{aligned}$$

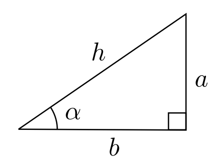
7. Trobeu amb la calculadora el valor de $\cos 47°35'42''$.

Amb les tecles de la calculadora $\boxed{\circ\ '\ ''}$ i $\boxed{\cos}$ introduïm l'angle i calculem el cosinus. En resulta,

$$\boxed{\cos 47°35'42'' = 0.674366827}.$$

8. Trobeu el valor de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ amb l'ajut del gràfic d'un triangle rectangle, en què un dels angles aguts val α, i del teorema de Pitàgoras.

a) Observem les raons trigonomètriques en el triangle adjunt:



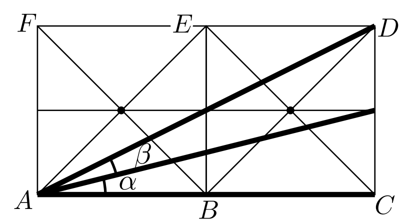
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{a^2+b^2}{h^2} \overset{(*)}{=} \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

$(*)$ Pel teorema de Pitàgoras aplicat al numerador.

9. Considereu els dos quadrats $ABEF$ i $BCDE$ de la figura adjunta. Calculeu:

a) Les raons trigonomètriques $\tan\alpha$ i $\tan(\alpha+\beta)$.

b) Els angles α i β.



a) Apliquem la definició de tangent trigonomètrica:

$$\tan\alpha = \frac{DC/2}{AC} = \frac{BC/2}{2BC} = \frac{BC}{4BC} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{DC}{AC} = \frac{BC}{2BC} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

b) Hem d'introduir els valors $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$ a la calculadora i trobar l'angle que els origina amb la combinació de tecles $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$.

$$\alpha = \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 14°\ 2'\ 10.48''}.$$

$$\alpha+\beta = \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha+\beta = 26°\ 33'\ 54.18'' \Longrightarrow \beta = (\alpha+\beta)-\alpha \Longrightarrow \boxed{\beta = 12°\ 31'\ 43.70''}.$$

Alumnes que han de recuperar: 1, 2a, 3, 4, 5.

Alumnes que no han de recuperar: 2, 3, 6, 7, 8, 9.