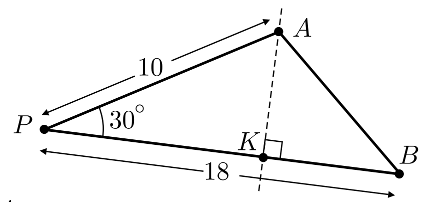
IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 4t ESO C 17/III/2006
Trigonometria i funcions $1.5 + 2 + 2 + 3 + 1.5$

1. Des d'un poble P es veuen dos pobles A i B sota un angle de 30°. Sabem que $PA = 10$ km, $PB = 18$ km i l'angle $\angle APB = 30°$. Calculeu la distància entre A i B.



Indicació: Us ajudarà el traçat de la perpendicular a PB des d'A.

Anomenem K el punt d'intersecció de PB amb la recta perpendicular indicada. Podríem calcular AB, amb l'ajut del teorema de Pitàgoras, si coneguéssim AK i KB.

- Càlcul d'AK amb l'ajut de $\sin 30° = \dfrac{AK}{10}$:

$$AK = 10 \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \ km.$$

- Càlcul de $KB = 18 - PK$, amb l'ajut de $\cos 30° = \dfrac{PK}{10}$:

$$KB = 18 - 10 \cos 30° = 18 - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 - 5\sqrt{3}.$$

Llavors, pel teorema de Pitàgoras:

$$AB = \sqrt{5^2 + \left(18 - 5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 324 + 75 - 180\sqrt{3}} = \sqrt{424 - 180\sqrt{3}} \approx 10.594 \text{ km}.$$

2. Si la tangent trigonomètrica d'un angle α és igual a 2, trobeu:

a) Els valors de $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$, sense calculadora.

b) Els valors de $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$, amb calculadora.

a) Utilitzarem les fórmules $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ i $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

- $\tan\alpha = 2 \Longrightarrow 1 + 2^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.

- $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$.

b) $\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = \tan^{-1} 2 = 63°26'5.82'' \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha \approx 0.8944272 \\ \cos\alpha \approx 0.4472136\,.\end{array}}$

3. Calculeu l'àrea d'un pentàgon regular inscrit en un cercle de radi 8 cm.

L'àrea serà igual a cinc vegades l'àrea del triangle isòsceles de vèrtexs el centre i dos vèrtexs consecutius del pentàgon. Aquest triangle té dos costats que mesuren 8 cm, els quals determinen un angle en el vèrtex de $360°/5 = 72°$. Per tant,

$$\text{Àrea} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 72° = \boxed{160 \cdot \sin 72° \approx 152.17 \text{ cm}}.$$

4. Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x + 3, \qquad g(x) = -\,\frac{9}{4}\,x^2 + \frac{63}{4}\,x - \frac{90}{4}\,.$$

Contesteu els tres primers apartats i un d'entre els dos últims:

a) Trobeu els punts de tall dels seus gràfics amb els eixos de coordenades i el vèrtex del gràfic de $g(x)$.

b) Representeu, utilitzant els resultats anteriors, sobre els mateixos eixos de coordenades, les dues funcions.

c) Trobeu analíticament les coordenades dels punts en què es tallen els dos gràfics i comproveu sobre els gràfics anteriors que els resultats concorden.

d) Observeu el gràfic de $g(x)$ i deduïu-ne raonadament la solució de la inequació

$$-\,\frac{9}{4}\,x^2 + \frac{63}{4}\,x - \frac{90}{4} < 0.$$

e) Trobeu l'expressió analítica de la funció afí tal que el seu gràfic és paral·lel al de $f(x)$ i passa pel punt $(1, 4)$.

a)

- $\boxed{\text{Funció } f(x) = \frac{1}{2}\,x + 3}$

–Tall OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\,x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 \cdot 2 = -6$

–Tall OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \frac{1}{2}\,0 + 3 = 3$

–Els talls amb els eixos estan en els punts $(-6, 0)$ i $(0, 3)$.

- $\boxed{\text{Funció } g(x) = -\,\frac{9}{4}\,\left(x^2 - 7x + 10\right)}$

–Talls OX: $g(x) = 0 \Longrightarrow -\,\frac{9}{4}\,\left(x^2 - 7x + 10\right) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \dfrac{7 \pm 2}{2} = \begin{cases} 2 \\ 5. \end{cases}$

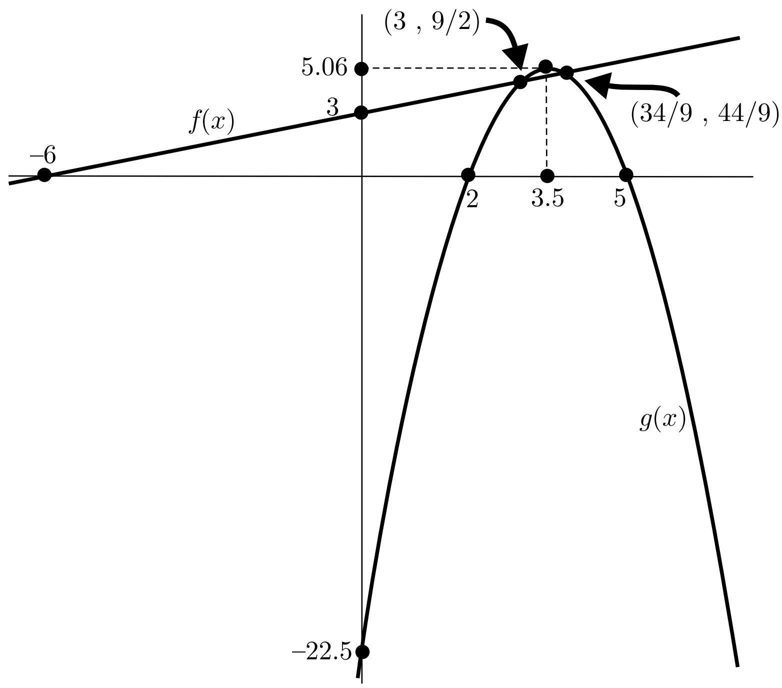
–Tall OY: $x = 0 \Longleftrightarrow g(0) = -\,\frac{9}{4}\,\left(0^2 - 7 \cdot 0 + 10\right) = -\frac{90}{4} = 22.5$

–Els talls amb els eixos són els punts $(2, 0)$, $(5, 0)$ i $(0, 22.5)$.

–A partir dels talls amb l'eix OX trobem el vèrtex de la paràbola associada a la funció $g(x)$:

$$x_v = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}\,, \quad y_v = g\left(\frac{7}{2}\right) = -\,\frac{9}{4}\,\left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 10\right) = \frac{81}{16} \approx 5.06.$$

b)



c) Els punts d'intersecció dels dos gràfics són els punts en què $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \iff & \frac{1}{2}x + 3 = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{63}{4}x - \frac{90}{4} \\ \iff & -9x^2 + 63x - 90 = 2x + 12 \iff -9x^2 + 61x - 102 = 0 \\ \iff & x = \frac{-61 \pm \sqrt{3721 - 3672}}{-18} = \frac{-61 \pm 7}{-18} = \begin{cases} 3 \Longrightarrow f(3) = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{34}{9} \Longrightarrow f\left(\dfrac{34}{9}\right) = \dfrac{44}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Els punts d'intersecció són $\boxed{\left(3, \frac{9}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{34}{9}, \frac{44}{9}\right)}$.

d) Si observem el gràfic de la paràbola, la solució s'obté de les abscisses dels punts que es troben "sota" l'eix OX. És a dir, $\boxed{x < 2 \quad \text{o} \quad x > 5}$.

e) Si el gràfic és paral·lel, tindrà el mateix pendent. Per tant la funció demanada és del tipus

$$h(x) = \frac{1}{2}x + k.$$

Si passa pel punt $(1, 4)$ s'ha de complir

$$4 = h(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + k \iff k = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

La funció demanada és $\boxed{h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$.

5. Els beneficis $A(x)$ i $B(x)$ en milers d'euros de dues empreses **A** i **B**, en què x representa el nombre de dies transcorreguts des de principi d'any, venen descrits per:

$$A(x) = \frac{x^2}{4} \quad \text{i} \quad B(x) = 400x - x^2.$$

Trobeu l'interval de dies en què l'empresa **A** té més beneficis que l'empresa **B** i, en aquest interval, quin dia és màxima la diferència de beneficis.

- $\boxed{\text{Funció } A(x)}$

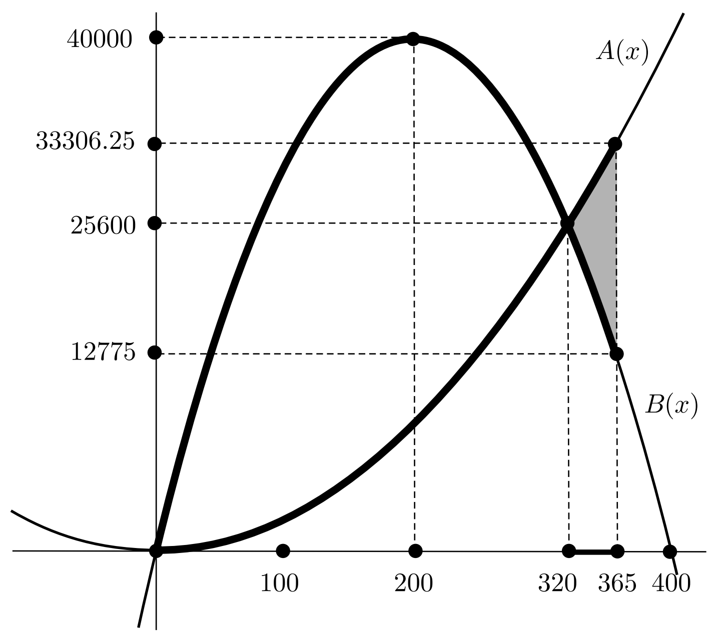
Talls OX: $A(x) = 0 \Longrightarrow x^2/4 = 0 \Longrightarrow x = 0$
Tall OY: $x = 0 \Longrightarrow A(0) = 0^2/4 = 0$
L'únic tall amb els eixos és el punt $(0, 0)$. Per tant, coincideix amb el vèrtex de la paràbola associada a la funció $A(x)$.

- $\boxed{\text{Funció } B(x)}$

Talls OX: $B(x) = 0 \Longrightarrow 400x - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x(400 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 400$.
Tall OY: $x = 0 \Longrightarrow B(0) = 400 \cdot 0 - 0^2 = 0$
Els talls amb els eixos són els punts $(0, 0)$ i $(400, 0)$. Per tant, el vèrtex de la paràbola associada a la funció $B(x)$ té coordenades:

$$x_v = \frac{0 + 400}{2} = 200,\ y_v = B(200) = 200(400 - 200) = 200^2 = 40000.$$

- Amb tota aquesta informació podem representar gràficament les dues funcions a l'interval $0 \le x \le 365$. Amb l'observació del gràfic podrem contestar les preguntes del problema. Els beneficis de l'empresa **A** més grans que els de l'empresa **B** venen representats a l'interval en què el gràfic d'$A(x)$ queda "més amunt" que el gràfic de $B(x)$. És a dir, des del punt de tall de la dreta dels dos gràfics fins el punt $x = 365$. Cal, doncs, buscar aquest punt de tall:



$$A(x) = B(x) \iff \frac{x^2}{4} = 400x - x^2 \iff \frac{5}{4}x^2 - 400x = 0 \iff x\left(\frac{5}{4}x - 400\right) = 0$$
$$\iff x = 0,\ A(0) = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{400 \cdot 4}{5} = 320,\ A(320) = 25600.$$

Per tant, l'interval cercat està constituït pels $\boxed{\text{dies que es troben entre el 320 i el 365}}$.

D'altra banda, del gràfic deduïm que $\boxed{\text{la diferència màxima es dóna el dia 365}}$ i el valor d'aquesta diferència és $A(365) - B(365) = 33306.25 - 12775 = 20531.25$ milers d'euros.