IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C 11/X/2005
Nombres racionals $1.5 + 0.5 + 5 + 2 \times 1.5$

Heu de resoldre les qüestions 1, 2 i 3, i dues qüestions entre les quatre últimes.

1. Hem elaborat una sangria amb els components següents:

$$\frac{1}{4} \text{ de vi, } \frac{1}{3} \text{ de gasosa i la part restant de suc de fruita.}$$

Després d'haver-ne begut la meitat, tornem a omplir la part que falta amb suc de fruita. Quina proporció de cada component té finalment la sangria?

	Composició inicial	Composició final
Vi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}.$
Gasosa	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}.$
Fruita	$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{17}{24}}.$

2. Trobeu raonadament tres fraccions racionals ordenades entre $\frac{3}{7}$ i $\frac{4}{7}$.

Cercarem fraccions equivalents d'igual denominador de manera que aquest sigui prou gran per encabir tres nombres enters entre els numeradors. Concretament, una possibilitat és

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = \frac{12}{28} \\ \frac{4}{7} = \frac{16}{28} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{3}{7} = \frac{12}{28} < \boxed{\frac{13}{28} < \frac{14}{28} < \frac{15}{28}} < \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

3. Opereu i simplifiqueu sense utilitzar la calculadora ni expressions decimals. En els resultats no han d'aparèixer exponents negatius:

a) $\displaystyle \frac{7}{12} - \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}.$

b) $\displaystyle \left(\frac{-\frac{5}{18} + 6}{6} + \frac{7}{18} \right) \cdot 18.$

c) $\displaystyle \frac{\frac{37}{180} + \frac{7}{60} \cdot \frac{1}{6}}{\left(\frac{35}{20} - 1 \right) \cdot \frac{1}{6}}.$

d) $\displaystyle \frac{0.01^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2}{75^2}.$

e) $\displaystyle \frac{(a^2 b^{-3})^4 \, a^6 b^7}{a^2 b^7}.$

a) $\displaystyle \frac{7}{12} - \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12} - \frac{5}{16} = \frac{28 - 15}{48} = \boxed{\frac{13}{48}}.$

b) $\displaystyle \left(\frac{-\frac{5}{18} + 6}{6} + \frac{7}{18} \right) \cdot 18 = 3 \left(-\frac{5}{18} + 6 \right) + 7 = -\frac{5}{6} + 18 + 7 = \frac{-5 + 150}{6} = \boxed{\frac{145}{6}}.$

c) $\dfrac{\dfrac{37}{180}+\dfrac{7}{60}\cdot\dfrac{1}{6}}{\left(\dfrac{35}{20}-1\right)\cdot\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{37}{180}+\dfrac{7}{360}}{\left(\dfrac{7}{4}-1\right)\cdot\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{74+7}{360}}{\dfrac{7-4}{4}\cdot\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{81}{360}}{\dfrac{3}{4\cdot 6}} = \dfrac{81\cdot 4\cdot 6}{360\cdot 3} = \dfrac{9\cdot 4\cdot 2}{40} = \boxed{\dfrac{9}{5}}.$

d) $\dfrac{0.01^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}{75^2} = \dfrac{\dfrac{1}{100^{-2}}\cdot\dfrac{3^2}{2^4}}{(3\cdot 5^2)^2} = \dfrac{100^2\cdot 3^2}{3^2\cdot 5^4\cdot 2^4} = \dfrac{2^4\cdot 5^4\cdot 3^2}{3^2\cdot 5^4\cdot 2^4} = \boxed{1}.$

e) $\dfrac{(a^2b^{-3})^4\, a^6b^7}{a^2b^7} = a^{2\cdot 4+6-2}\cdot b^{-3\cdot 4+7-7} = a^{12}\cdot b^{-12} = \boxed{\dfrac{a^{12}}{b^{12}}}.$

4. a) Raoneu si és cert que la suma de dos nombres enters consecutius és igual a la diferència dels seus quadrats, (el quadrat del gran menys el del petit).
b) Trobeu dos nombres enters consecutius tals que la diferència dels seus quadrats sigui igual a 35473.

a) És cert perquè si anomenem n i $n+1$ els dos enters consecutius

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1\\(n+1)+n = 2n+1\end{array}\right\} \Longrightarrow (n+1)^2-n^2 = (n+1)+n.$$

b) $35473 = (n+1)^2-n^2 = 2n+1 \Longrightarrow n = \dfrac{35473-1}{2} = 17736.$

Els nombres són: $\boxed{\text{17736 i 17737}}$.

5. El preu d'un producte ha sofert un pujada del 12% i, al cap de pocs dies, el preu resultant s'ha tornat a apujar un altre 12%. Si el preu final és de 1693.44 euros, calculeu el preu inicial.

Preu inicial	Preu després de la 1a pujada	Preu final
x	$1.12\,x$	$1.12(1.12\,x) = 1693.44\,.$

Per tant,

$$1.12^2\,x = 1693.44 \Longrightarrow x = \frac{1693.44}{1.12^2} = \frac{1693.44}{1.2544} = \boxed{1350 \text{ euros}}.$$

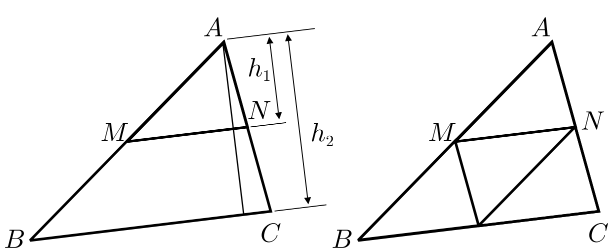
6. En un triangle $\triangle ABC$ considereu els punts mitjans M i N dels costats AB i AC. Trobeu la proporció entre les àrees dels triangles $\triangle AMN$ i $\triangle ABC$.

Els triangles $\triangle AMN$ i $\triangle ABC$ són semblants, perquè

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{NC}$$

i

$$\angle MAN = \angle BAC.$$



Llavors, els segments corresponents en els dos triangles guarden la proporció de 1 a 2. Concretament ho fan els segments MN i BC, així com les altures h_1 i h_2 des d'A. Per tant,

$$\text{àrea}(\triangle AMN) = \frac{1}{2}\,MN\cdot h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,BC\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\,h_2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,BC\cdot h_2\right) = \frac{1}{4}\,\text{àrea}(\triangle ABC).$$

A la figura de la dreta s'observa com el triangle ABC conté quatre vegades el triangle AMN.

7. Trobeu raonadament la fracció generatriu del nombre decimal $3.6\widehat{04}$ i expresseu en forma de fracció racional simplificada el nombre:

$$\frac{0.125}{5-3.6\widehat{04}}\,.$$

Es tracta de manipular el decimal de manera que s'obtinguin dos decimals diferents amb el mateix període, de manera que aquest pugui ser eliminat mitjançant una resta,la qual cosa permetrà expressar el decimal com una relació entre enters. Ho aconseguirem "córrer" la coma decimal, —multiplicant per potències de 10—, primer fins el final del període i després fins tot just abans del període. Concretament,

$$\left.\begin{array}{rcl} 10^3\ \times 3.6\widehat{04} & = & 3604.\widehat{04} \\ -10\ \times 3.6\widehat{04} & = & -\ 36.\widehat{04} \\ \hline 990\ \times 3.6\widehat{04} & = & 3568 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3.6\widehat{04} = \frac{3568}{990} = \boxed{\frac{1784}{495}}\,.$$

$$\frac{0.125}{5-3.6\widehat{04}} = \frac{\dfrac{125}{1000}}{5-\dfrac{1784}{495}} = \frac{\dfrac{1}{8}}{\dfrac{691}{495}} = \frac{495}{8\cdot 691} = \boxed{\frac{495}{5528}}\,.$$